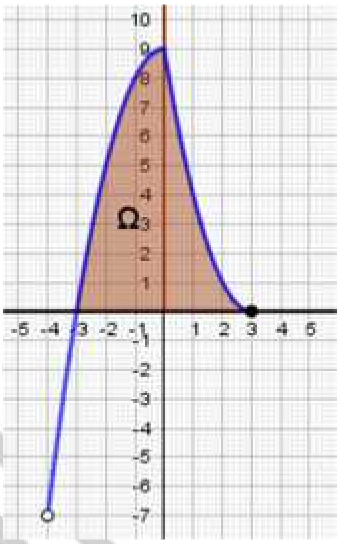
17η Άσκηση

Όριο στο x_0



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

β) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της.

γ) Να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα της f.

δ) Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = f(-x) + x,\ x \in [-3,0]$.

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{f^2(x) + 7f(x)}{f^2(x) - 49}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{f(x)} - 3}{f(x) - 9}$

iii. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\eta\mu f(x)}{f^2(x) + f(x)}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|f(x) - 9|}{f^2(x) - 81}$

στ) Αν $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{f(x)}{x+3} = -6$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{f(x^2 - 4)}{x^2 + x}$.

ζ) Έστω συνάρτηση $g : (-3,3) \to (0,9)$.

i. Αν η γραφική παράσταση της g βρίσκεται ολόκληρη στο γραμμοσκιασμένο χωρίο Ω, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to -3} g(x) = \lim\limits_{x\to 3} g(x) = 0$.

ii. Αν $g^2(x) + 1 \le 2g(x) + f(x)$ για κάθε $x \in (-3,3)$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Οι τετμημένες των προβολών των σημείων της C_f στον άξονα $x'x$ δημιουργούν το διάστημα $(-4,3]$, άρα $D_f=(-4,3]$.

Οι τεταγμένες των προβολών των σημείων της C_f στον άξονα $y'y$ δημιουργούν το διάστημα $(-7,9]$, άρα $f(A)=(-7,9]$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-4,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$.

γ) Η f έχει μέγιστο το 9 για $x=0$.

δ) Έστω $-3\le x_1<x_2\le 0\ (1)$ τότε $3\ge -x_1>-x_2\ge 0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$, ισχύει ότι: $f(-x_1)<f(-x_2)\ (2)$.

Από $(1)+(2)\Rightarrow f(-x_1)-x_1<f(-x_2)-x_2 \Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)\Rightarrow h\nearrow[-3,0]$.

ε) i. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=-7$, οπότε:

$$\lim_{x\to -4}\frac{f^2(x)+7f(x)}{f^2(x)-9}=\lim_{x\to -4}\frac{f(x)\cancel{(f(x)+7)}}{(f(x)-7)\cancel{(f(x)+7)}}\overset{\substack{f(x)=u\\ \lim\limits_{x\to -4} f(x)=-7}}{=}\lim_{u\to -7}\frac{u}{u-7}=\frac{-7}{-7-7}=\frac{1}{2}$$

ii. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=9$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}-3}{f(x)-9}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{f(x)}-3\right)\left(\sqrt{f(x)}+3\right)}{(f(x)-9)\left(\sqrt{f(x)}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{f(x)}\right)^2-9}{(f(x)-9)\left(\sqrt{f(x)}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{f(x)-9}}{\cancel{(f(x)-9)}\left(\sqrt{f(x)}+3\right)}\overset{\substack{f(x)=u\\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=9}}{=}\lim_{u\to 9}\frac{1}{\sqrt{u}+3}=\frac{1}{6}$$

iii. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\eta\mu f(x)}{f^2(x)+f(x)}\overset{\substack{f(x)=u\\ \lim\limits_{x\to -3} f(x)=0}}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u^2+u}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u(u+1)}=\lim_{u\to 0}\left(\frac{\eta\mu u}{u}\cdot\frac{1}{u+1}\right)=1$$

iv. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $f(x)\le 9$ για κάθε $x\in D_f$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-9|}{f^2(x)-81}=\lim_{x\to 0}\frac{-f(x)+9}{f^2(x)-81}\overset{\substack{f(x)=u\\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=9}}{=}\lim_{u\to 9}\frac{-\cancel{(u-9)}}{\cancel{(u-9)}(u+9)}=-\frac{1}{18}$$

στ) Είναι $$\lim_{x\to -1}\frac{f(x^2-4)}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\left[\frac{f(x^2-4)}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+x}\right]=\lim_{x\to -1}\left[\frac{f(x^2-4)}{x^2-1}\cdot\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}}\right]=-6\cdot\frac{-2}{-1}=-12$$

γιατί $$\lim_{x\to -1}\frac{f(x^2-4)}{x^2-1}\overset{\substack{x^2-4=u\Leftrightarrow\\ x^2-1=u+3\\ x\to -1\Rightarrow\\ u\to -3}}{=}\lim_{u\to -3}\frac{f(u)}{u+3}=-6$$

ζ) i. Επειδή η γραφική παράσταση της g βρίσκεται ολόκληρη στο γραμμοσκιασμένο χωρίο Ω, ισχύει ότι

$0 \le g(x) \le f(x)$ για κάθε $x \in (-3,3)$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = \lim\limits_{x \to 3} g(x) = 0$.

ii. Για κάθε $x \in (-3,3)$ είναι

$$g^2(x) + 1 \le 2g(x) + f(x) \Leftrightarrow g^2(x) - 2g(x) + 1 \le f(x) \Leftrightarrow \left(g(x) - 1\right)^2 \le f(x)$$

Επειδή για $x \in (0,3)$ είναι $f(x) > 0$, έχουμε:

$$|g(x) - 1| \le \sqrt{f(x)} \Leftrightarrow -\sqrt{f(x)} \le g(x) - 1 \le \sqrt{f(x)} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{f(x)} \le g(x) \le 1 + \sqrt{f(x)}$$

Είναι $\lim\limits_{x \to 3}\left(1 - \sqrt{f(x)}\right) \underset{\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0}{\overset{f(x) = u}{=}} \lim\limits_{u \to 0}\left(1 - \sqrt{u}\right) = 1$, $\lim\limits_{x \to 3}\left(1 + \sqrt{f(x)}\right) \underset{\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0}{\overset{f(x) = u}{=}} \lim\limits_{u \to 0}\left(1 + \sqrt{u}\right) = 1$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 1$.