# Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
## Θέματα προαγωγικών εξετάσεων στη Γεωμετρία

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Μονάδες 15

**Α2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α)** Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι ίσες.
**β)** Αν δύο απέναντι πλευρές τετραπλεύρου είναι παράλληλες τότε αυτό είναι τραπέζιο.
**γ)** Οι διαγώνιες του ρόμβου είναι ίσες.
**δ)** Αν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου είναι κάθετες τότε το τετράπλευρο αυτό είναι ρόμβος.
**ε)** Σε κάθε παραλληλόγραμμο δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ κατά τμήματα $B\Delta = AB$ και $\Gamma E = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

**Γ1.** $BE = \Gamma\Delta$

Μονάδες 8

**Γ2.** Τα σημεία Δ,Ε ισαπέχουν από τη ΒΓ.

Μονάδες 9

**Γ3.** $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με $\hat{A} = 40^\circ$ και σημείο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε ΜΕ // ΑΒ (Ε σημείο του ΑΓ) και ΜΔ//ΑΓ (Δ σημείο του ΑΒ). Να αποδείξετε ότι:

**Γ1.** ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ.

Μονάδες 7

**Γ2.** $\hat{B} = 70^\circ$

Μονάδες 6

**Γ3.** Αν το Μ είναι μέσο του ΒΓ τότε η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ.

Μονάδες 6

**Γ4.** $A\hat{E}\Delta = 70^\circ$

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Στη προέκταση της ΑΓ προς το μέρος του Α θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $A\Delta = A\Gamma$. Έστω Κ,Λ τα μέσα των ΒΓ και ΒΔ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

**Δ1.** $B\hat{A}K = B\hat{A}\Lambda = 30^\circ$

Μονάδες 7

**Δ2.** $AK = A\Lambda$

Μονάδες 6

**Δ3.** Το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 6

**Δ4.** Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΚΛ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.

Μονάδες 6

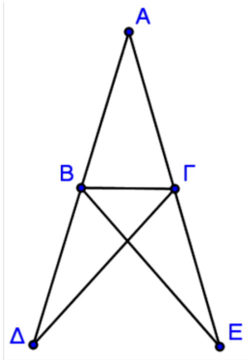
# Απαντήσεις

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεώρημα Ι σελίδα 104

**Α2.** α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β



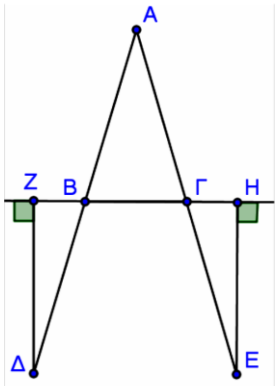

**Β1.** Τα τρίγωνα ΒΓΕ και ΒΔΓ έχουν:

i. $ΒΓ =$ κοινή πλευρά

ii. $ΒΔ = ΑΒ = ΑΓ = ΓΕ$

iii. $Δ\hat{Β}Γ = Ε\hat{Γ}Β$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β,Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΒΕ = ΓΔ$




**Β2.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΔ και ΓΗΕ έχουν:

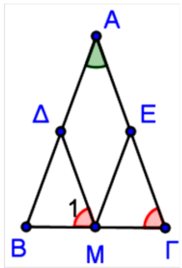
i. $ΒΔ = ΓΕ$

ii. $Ζ\hat{Β}Δ = Η\hat{Γ}Ε$ γιατί είναι κατακορυφήν των ίσων γωνιών Β,Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Επειδή τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία τους ίση, είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΖΔ = ΕΗ$

**Β3.** Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ = ΓΕ είναι και $ΑΒ + ΒΔ = ΑΓ + ΓΕ \Leftrightarrow ΑΔ = ΑΕ$ άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές και οι γωνίες $Α\hat{Δ}Ε$, $Α\hat{Ε}Δ$ είναι στη βάση του οπότε είναι ίσες.

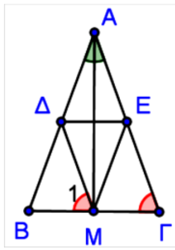
## ΘΕΜΑ Γ




**Γ1.** Επειδή ΜΕ // ΑΒ και ΜΔ//ΑΓ, το τετράπλευρο ΑΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΜΕ = ΑΔ (1)

Είναι $\hat{Μ}_1 = \hat{Γ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΜΔ//ΑΓ που τέμνονται από την ΒΓ και $\hat{Β} = \hat{Γ}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου, άρα $\hat{Μ}_1 = \hat{Β}$. Κατά συνέπεια το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές και έχει $ΔΒ = ΔΜ$ (2)

$ΜΔ + ΜΕ \overset{(1),(2)}{=} ΔΒ + ΑΔ = ΑΒ$.




**Γ2.** $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \hat{Β} + \hat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Β} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} = 70^\circ = \hat{Γ}$

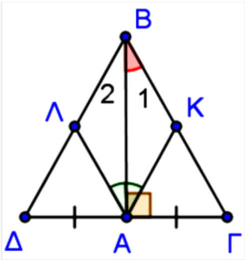
**Γ3.** Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, η διάμεσός του ΑΜ είναι ύψος και διχοτόμος του.

Είναι Μ μέσο της ΒΓ και ΜΔ//ΑΓ άρα το Δ είναι μέσο του ΑΒ και όμοια το Ε είναι μέσο του ΑΓ.

Είναι $ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΕ$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΔΕ, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, άρα η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ.

**Γ4.** Είναι $Α\hat{Ε}Δ = \hat{Γ} = 70^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΕΔ, ΓΒ που τέμνονται από την ΑΓ.

## ΘΕΜΑ Δ




**Δ1.** Στο τρίγωνο ΒΓΔ η ΒΑ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει ΒΔ = ΒΓ και $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 30^\circ$.

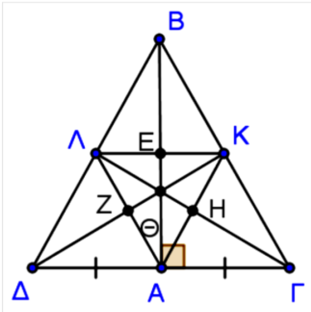
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, οπότε $ΑΚ = ΚΒ = ΚΓ = \frac{ΒΓ}{2}$, άρα το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ, οπότε $Β\hat{Α}Κ = \hat{B}_1 = 30^\circ$.

Όμοια στο ορθογώνιο ΒΑΔ η ΑΛ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα, άρα $ΑΛ = ΒΛ = ΛΔ = \frac{ΑΒ}{2}$, οπότε το τρίγωνο ΑΛΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ, άρα $Β\hat{Α}Λ = \hat{B}_2 = 30^\circ$.

**Δ2.** Επειδή $ΑΚ = \frac{ΒΓ}{2}$, $ΑΛ = \frac{ΒΔ}{2}$ και ΒΓ = ΒΔ, είναι και ΑΚ = ΑΛ.

**Δ3.** Είναι $Δ\hat{Β}Γ = 60^\circ$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΔ γίνεται ισόπλευρο.

Επειδή τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ ισχύει ότι $ΚΛ = \frac{ΓΔ}{2}$. όμως $ΑΚ = \frac{ΒΓ}{2}$ και $ΑΛ = \frac{ΒΔ}{2}$, άρα $ΚΛ = ΑΚ = ΑΛ$ και το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισόπλευρο.




**Δ4.** Επειδή ΔΛ=ΔΑ το τρίγωνο ΔΑΛ είναι ισοσκελές. Είναι Α,Λ μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα ΑΛ//ΒΓ. Η ΔΚ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ, οπότε θα είναι μεσοκάθετος και του ΑΛ.

Όμοια η ΒΑ είναι μεσοκάθετος στις ΓΔ και ΚΛ.

Οι διάμεσοι του τριγώνου ΒΓΔ τέμνονται στο Θ στο οποίο τέμνονται και οι διάμεσοι του ΑΚΛ, οπότε τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.