ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$. (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$. Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

Β.1. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}$$

$$=\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0$, έχουμε

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x$. Δηλαδή, $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.

Β.2. **α.** Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Σ **ε.** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(3)+f(8)+f(13)+f(18)=i^3z+i^8z+i^{13}z+i^{18}z=-iz+z+iz-z=0$

β. $f(13)=iz=\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=\rho\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$

γ. Αν $|z|=2$ και $\mathrm{Arg}(z)=\frac{\pi}{3}$ τότε

$$f(13)=2\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(-\eta\mu\frac{\pi}{3}+i\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+i$$

$$z=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}$$

Εστω A η εικόνα του z και B η εικόνα του $f(13)$, τότε $A\left(-\sqrt{3},1\right)$ και $B\left(1,\sqrt{3}\right)$.

Είναι $\overrightarrow{OA}=\left(-\sqrt{3},1\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(-1,\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$

Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με εμβαδόν

$(OAB)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{2}|z|\cdot|f(13)|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$. Επειδή η f είναι συνάρτηση, ισχύει :

$f(g(x_1))=f(g(x_2))\Leftrightarrow (fog)(x_1)=(fog)(x_2)$ και επειδή η fog είναι 1-1 έχουμε :

$x_1=x_2$.Άρα η g είναι 1-1.

β. $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)\overset{g1-1}{\Leftrightarrow} f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1\Leftrightarrow x^3-3x+1=0$

Εστω $h(x)=x^3-3x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(x)=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)$

$h'(x)\geq 0\Leftrightarrow 3\left(x^2-1\right)\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow |x|\geq 1\Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$.

Για κάθε $x<-1$ είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow(\infty,-1]$. Για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι

$h'(x)<0\Rightarrow h\searrow[-1,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow[1,+\infty)$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-1]$ η h είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα:

$h(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),h(-1)\right]=(-\infty,3]$.

Επειδή $0\in h(\Delta_1)$ και η h είναι $\nearrow$ στο Δ_1, υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1=(-\infty,-1]$ $(x_1<0)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1)=0$.

Είναι $h(0)=1>0$, $h(1)=-1<0$, δηλαδή $h(0)\cdot h(-1)<0$, οπότε λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $x_2\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_2)=0$. Επειδή η h είναι $\nearrow$ στο $[0,1]$ το $x_2>0$ είναι μοναδικό.

Στο διάστημα $\Delta_2=[-1,0]$ η h είναι συνεχής και $\searrow$ άρα: $h(\Delta_2)=\left[h(0),h(-1)\right]=[1,3]$.

Επειδή $0\notin h(\Delta_2)$ η h(x)=0 δεν έχει ρίζα στο Δ_2.

Στο διάστημα $\Delta_3=[1,+\infty)$ η h είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα:

$h(\Delta_3)=\left[h(1),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=[-1,+\infty)$.

Επειδή $0\in h(\Delta_2)$ και η h είναι $\nearrow$ στο Δ_2, υπάρχει μοναδικό $x_3\in(1,+\infty)$ $(x_3>0)$ τέτοιο, ώστε $h(x_3)=0$.

Επομένως η $h(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x+1=0$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μια αρνητική ρίζα.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή συναρτήσεις h, g είναι συνεχείς τότε και η συνάρτηση h(x)-g(x) είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(x) > g(x) \Leftrightarrow h(x) - g(x) > 0$ οπότε $\int_{\alpha}^{\beta}[h(x) - g(x)]dx > 0 \Leftrightarrow$

$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

β. i. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας στη σχέση $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$

έχουμε $f'(x) + e^{-f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left(1 + e^{-f(x)}\right) f'(x) = 1$,

επειδή $1 + e^{-f(x)} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι : $f'(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-f(x)}}$.

Εστω $g(x) = f(x) - \dfrac{x}{2}$, $x \geq 0$. Είναι $g'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{2}$.

Είναι : $f'(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-f(x)}} > 0$ άρα f $\nearrow$ στο $[0, +\infty)$ και $f''(x) = \dfrac{e^{-f(x)} \cdot f'(x)}{\left(1 + e^{-f(x)}\right)^2} > 0$ άρα

$f' \nearrow [0, +\infty)$.

ii. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > \dfrac{1}{2}$. Άρα $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - \dfrac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow f(x) > \dfrac{x}{2}$.

Εστω $h(x) = f(x) - xf'(x)$, $x \geq 0$.

Είναι $h'(x) = f'(x) - f'(x) - xf''(x) \Leftrightarrow h'(x) = -xf''(x) < 0 \Rightarrow h \searrow [0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < xf'(x)$.

iii. Επειδή $f(x) > \dfrac{x}{2} > 0$ είναι $f(x) > 0$ στο [0,1] οπότε το εμβαδόν Ε, είναι : $E = \int_0^1 f(x)dx$.

Επειδή $f(x) > \dfrac{x}{2}$ για κάθε x>0, έχουμε : $\int_0^1 \dfrac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 < E \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < E$ (1).

Επίσης είναι $f(x) < xf'(x)$ οπότε και $\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx \Leftrightarrow E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$

$E < f(1) - E \Leftrightarrow 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \dfrac{1}{2} f(1)$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε : $\dfrac{1}{4} < E < \dfrac{1}{2} f(1)$.