2ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα 2015

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν δύο συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 του πεδίου ορισμού τους, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α3. Πως ορίζεται το μέτρο μιγαδικού αριθμού $z=x+yi$;

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Ο αντίστροφος του i είναι ο $-i$.

β) Αν μια συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα, τότε και το πεδίο ορισμού της είναι κλειστό διάστημα.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε δεν υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

δ) Αν $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε είναι και $f'(x)=g'(x)$

ε) Αν η ευθεία $y=\beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Εστω μιγαδικός αριθμός z με $\text{Im}(z)>0$ για τον οποίο ισχύει ότι $|z^2+1|=3$ και έστω ότι οι αριθμοί $|z-i|$ και $|z+i|$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-4x+\lambda=0$.

Β1. Να δείξετε ότι $\lambda=3$.

μονάδες 6

Β2. Να δείξετε ότι $z=2i$.

μονάδες 7

Β3. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $\nu\in\mathbb{N}^*$ για τον οποίο ισχύει ότι: $(1-z)^\nu=\left(-iz+\frac{z}{2}\right)^\nu$.

μονάδες 6

Β4. Να δείξετε ότι ο z είναι ρίζα της εξίσωσης $w^4+w^3+5w^2+4w+4=0,\ w\in\mathbb{C}$ και στη συνέχεια να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες της.

μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[2,4]$ με $f'(2)>0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει μέγιστο στο $x_0=2$.

μονάδες 5

Εστω ότι $f(2)=5,\ f(4)=9$

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (2,4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=7$.

μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_2, x_3 \in (2,4)$ τέτοια, ώστε $f'(x_3)+f'(x_2)=f'(x_3)f'(x_2)$.

μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=4-\dfrac{f(x)-1}{x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2,4)$.

μονάδες 4

Γ5. Αν $f''(x)>0$ για κάθε $x \in (2,4)$, να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

μονάδες 4

Γ6. Αν $f'(x) \le 2$ για κάθε $x \in (2,4)$, να αποδείξετε ότι $f(x)=2x+1$, $x \in [2,4]$.

μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Εστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$f'(x)(1-2\ln x)+xf''(x)=\dfrac{2f(x)}{x}$ για κάθε $x>0$, $f(1)=1$ και $f'(1)=0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{\ln^2 x}$.

μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε τους $\alpha,\beta,\in(0,+\infty)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει ότι $\alpha^{\ln\alpha}+\beta^{\ln\beta}=2-\gamma^2$.

μονάδες 6

Εστω $F(x)=\displaystyle\int_{\frac{e}{x}}^{1}\frac{f(tx)-e}{t-\frac{e}{x}}dt,\ x \ge e$

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_1>e$ τέτοιο, ώστε $e^{\ln^2 \xi_1}<\displaystyle\int_e^x \frac{f(u)-e}{u-e}du+e$.

μονάδες 5

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (e,\alpha)$, $\alpha>e$ τέτοιο, ώστε $F'(\alpha)=f'(\xi)$.

μονάδες 5

Καλή Επιτυχία στις εξετάσεις!!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

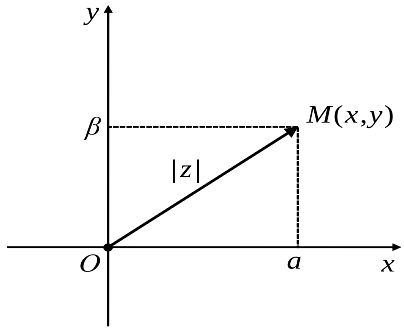
Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Α3. Εστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως μέτρο του z την απόσταση του Μ από την αρχή Ο, δηλαδή $|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}$



Α4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

α) $|z^2+1|=3\Leftrightarrow|z^2-i^2|=3\Leftrightarrow|(z-i)(z+i)|=3\Leftrightarrow|z-i||z+i|=3$

Επειδή οι $|z-i|$ και $|z+i|$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-4x+\lambda=0$, από τους τύπους Vietta είναι $P=|z-i||z+i|=\lambda$, άρα $\lambda=3$.

β) Για $\lambda=3$ η εξίσωση γίνεται $x^2-4x+3=0$ και έχει ρίζες $x=1$ ή $x=3$. Άρα $|z-i|=1$ και $|z+i|=3$ ή $|z-i|=3$ και $|z+i|=1$.

Αν $|z-i|=1$ και $|z+i|=3$, τότε:

$|z-i|=1\Leftrightarrow|z-i|^2=1\Leftrightarrow(z-i)(\bar z+i)=1\Leftrightarrow z\bar z+iz-i\bar z+\cancel{1}=\cancel{1}\Leftrightarrow z\bar z=i(\bar z-z)$ (1)

$|z+i|=3\Leftrightarrow|z+i|^2=9\Leftrightarrow(z+i)(\bar z-i)=9\Leftrightarrow z\bar z-iz+i\bar z+1=9\Leftrightarrow z\bar z+i(\bar z-z)=8\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$z\bar z+z\bar z=8\Leftrightarrow 2|z|^2=8\Leftrightarrow|z|^2=4\Leftrightarrow|z|=2$

Εστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$. Τότε $(1)\Rightarrow 4=i(-2yi)\Leftrightarrow y=2$ και

$|z|=2\Leftrightarrow x^2+y^2=4\Leftrightarrow x^2+4=4\Leftrightarrow x=0$, άρα $z=2i$

Αν $|z-i|=3$ και $|z+i|=1$, τότε:

$|z+i|=1\Leftrightarrow|z+i|^2=1\Leftrightarrow(z+i)(\bar z-i)=1\Leftrightarrow z\bar z-iz+i\bar z+\cancel{1}=\cancel{1}\Leftrightarrow z\bar z=i(z-\bar z)$ (2)

$|z-i|=3\Leftrightarrow|z-i|^2=9\Leftrightarrow(z-i)(\bar z+i)=9\Leftrightarrow z\bar z+iz-i\bar z+1=9\Leftrightarrow z\bar z+i(z-\bar z)=8\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$z\bar{z}+z\bar{z}=8 \Leftrightarrow 2|z|^2=8 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$

Εστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$. Τότε $(2)\Rightarrow 4=i(2yi)\Leftrightarrow y=-2$ απορρίπτεται γιατί $\mathrm{Im}(z)>0$.

γ) $(1-z)^\nu=\left(-iz+\dfrac{z}{2}\right)^\nu \Leftrightarrow (1-2i)^\nu=(2+i)^\nu \Leftrightarrow \left(-i^2-2i\right)^\nu=(2+i)^\nu \Leftrightarrow$

$(-i)^\nu\cancel{(i+2)^\nu}=\cancel{(2+i)^\nu} \Leftrightarrow (-i)^\nu=1 \Leftrightarrow \nu=4\kappa,\ \kappa\in\mathbb{N}$.

Επειδή $\nu>0 \Leftrightarrow 4\kappa>0 \Leftrightarrow \kappa>0$ άρα $\kappa_{min}=1$ και $\nu_{min}=4$

δ) Για να είναι ρίζα πρέπει:

$(2i)^4+(2i)^3+5(2i)^2+4\cdot 2i+4=0 \Leftrightarrow 16-8i-20+8i+4=0$ ισχύει.

Επειδή $z^4+z^3+5z^2+4z+4=0$, είναι και

$\overline{z^4+z^3+5z^2+4z+4}=0 \Leftrightarrow \bar{z}^4+\bar{z}^3+5\bar{z}^2+4\bar{z}+4=0$, άρα και ο $\bar{z}=-2i$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

Είναι $(w-2i)(w+2i)=w^2+4$ και

$w^4+w^3+5w^2+4w+4=0 \Leftrightarrow w^4+w^3+4w^2+w^2+4w+4=0 \Leftrightarrow$

$w^2\left(w^2+4\right)+w^3+w^2+4w+4=0 \Leftrightarrow w^2\left(w^2+4\right)+w\left(w^2+4\right)+\left(w^2+4\right)=0 \Leftrightarrow$

$\left(w^2+4\right)\left(w^2+w+1\right)=0 \Leftrightarrow w^2+4=0 \Leftrightarrow w=\pm 2i$ ή $w^2+w+1=0 \Leftrightarrow w_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 2, τότε $f(x)\le f(2) \Leftrightarrow f(x)-f(2)\le 0$.

Για κάθε $x\in(2,4)$ είναι $x-2>0$, άρα $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\le 0$, οπότε και $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\le 0$ (1).

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, ισχύει ότι $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} \Leftrightarrow f'(2)\le 0$ άτοπο.

Άρα η f δεν έχει μέγιστο στο 2.

Γ2. Επειδή $f(2)<7<f(4)$ και η f είναι συνεχής στο $[2,4]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=7$.

Γ3. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[2,x_1]$ και $[x_1,4]$, οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in(2,4)$ τέτοια, ώστε:

$f'(x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(2)}{x_1-2}=\dfrac{2}{x_1-2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f'(x_2)}=\dfrac{x_1-2}{2}$ και

$f'(x_3)=\dfrac{f(4)-f(x_1)}{4-x_1}=\dfrac{9-7}{4-x_1}=\dfrac{2}{4-x_1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f'(x_3)}=\dfrac{4-x_1}{2}$

$\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}=\dfrac{x_1-2}{2}+\dfrac{4-x_1}{2}=\dfrac{\cancel{x_1}-2+4-\cancel{x_1}}{2}=1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{f'(x_3)+f'(x_2)}{f'(x_2)f'(x_3)}=1 \Leftrightarrow f'(x_3)+f'(x_2)=f'(x_2)f'(x_3)$

Γ4. $f'(x)=4-\dfrac{f(x)-1}{x}\Leftrightarrow xf'(x)=4x-f(x)+1\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)-4x-1=0$

Εστω $g(x)=xf(x)-2x^2-x,\ x\in[2,4]$.

Η g είναι συνεχής στο $[2,4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(2,4)$ με $g'(x)=xf'(x)+f(x)-4x-1$

Επιπλέον $g(2)=2f(2)-8-2=10-10=0$, $g(4)=4f(4)-32-4=36-36=0$, δηλαδή $g(2)=g(4)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle, η εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)-4x-1=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2,4)$.

Γ5. Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(2,4)$ και η f' είναι συνεχής, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,4]$. Για κάθε $2<x<4\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(2)<f'(x)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[2,4]$.

Επειδή $f(2)=5$ και $f(4)=9$, η f έχει σύνολο τιμών το $[5,9]$.

Γ6. Εστω $x\in(2,4)$.Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[2,x]$ και $[x,4]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(2,x)$ και $\xi_2\in(x,4)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{f(x)-5}{x-2}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(4)-f(x)}{4-x}=\dfrac{9-f(x)}{4-x}$

Είναι $f'(\xi_1)\le 2\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-5}{x-2}\le 2\Leftrightarrow f(x)\le 2x+1$ (1) και

$f'(\xi_2)\le 2\Leftrightarrow \dfrac{9-f(x)}{4-x}\le 2\Leftrightarrow 9-f(x)\le 8-2x\Leftrightarrow f(x)\ge 2x+1$ (2)

Από τις (1),(2) είναι $f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in(2,4)$. Επειδή $f(2)=2\cdot 2+1=5$ και $f(4)=2\cdot 4+1=9$, είναι $f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in[2,4]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)(1-2\ln x)+xf''(x)=\dfrac{2f(x)}{x}\Leftrightarrow f'(x)-2f'(x)\ln x+xf''(x)=\dfrac{2f(x)}{x}\Leftrightarrow$

$f'(x)+xf''(x)=2\ln xf'(x)+\dfrac{2f(x)}{x}\Leftrightarrow (xf'(x))'=(2\ln xf(x))'\Leftrightarrow xf'(x)=2\ln xf(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

Για $x=1$ είναι $c=0$, άρα $xf'(x)-2\ln xf(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-\dfrac{2\ln x}{x}f(x)=0\Leftrightarrow$

$$e^{-\ln^2 x}f'(x)-\frac{2\ln x}{x}e^{-\ln^2 x}f(x)=0\Leftrightarrow \left(e^{-\ln^2 x}f(x)\right)'=0\Leftrightarrow e^{-\ln^2 x}f(x)=c_1\Leftrightarrow f(x)=c_1e^{\ln^2 x},\ c_1\in\mathbb{R}$$

Για $x=1$ είναι $c_1=0$ άρα $f(x)=e^{\ln^2 x}$.

Δ2. Είναι $f'(x)=e^{\ln^2 x}2\dfrac{\ln x}{x}\ge 0\Leftrightarrow \ln x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1$.

Δ3. Είναι $f(x)\geq f(1)=1$ για κάθε $x>0$, άρα $f(\alpha)\geq 1 \Leftrightarrow \alpha^{\ln\alpha}\geq 1$ και $f(\beta)\geq 1\Leftrightarrow \beta^{\ln\beta}\geq 1$, άρα και $\alpha^{\ln\alpha}+\beta^{\ln\beta}\geq 2\Leftrightarrow 2-\gamma^2\geq 2\Leftrightarrow \gamma^2\leq 0\Leftrightarrow \gamma=0$. Τότε $\alpha^{\ln\alpha}+\beta^{\ln\beta}=2$, άρα $f(\alpha)+f(\beta)=2$ και αυτό ισχύει μόνο όταν $f(\alpha)=1\Leftrightarrow \alpha=1$ και $f(\beta)=1\Leftrightarrow \beta=1$

Δ4. $F(x)=\int_{\frac{e}{x}}^{1}\frac{f(tx)-e}{t-\frac{e}{x}}dt=\int_{\frac{e}{x}}^{1}\frac{f(tx)-e}{\frac{tx-e}{x}}dt=\int_{\frac{e}{x}}^{1}\frac{f(tx)-e}{tx-e}xdt$

Θέτουμε $tx=u$ τότε $xdt=du$.

Για $t=\frac{e}{x}$ είναι $u=e$ και για $t=1$ είναι $u=x$. Τότε $F(x)=\int_e^x\frac{f(u)-e}{u-e}du$.

Από το Θ.Μ.Τ. για την F υπάρχει $\xi_1\in(e,x)$, $x>e$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi_1)=\frac{F(x)-\cancelto{0}{F(e)}}{x-e}\Leftrightarrow\frac{f(\xi_1)-e}{\xi_1-e}=\frac{F(x)}{x-e}\Leftrightarrow$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το $(e,+\infty)$, έχουμε:

$$e<\xi_1<x\Leftrightarrow f(e)<f(\xi_1)<f(x)\Rightarrow 0<f(\xi_1)-e<f(x)-e$$

Είναι $e<\xi_1<x\Leftrightarrow 0<\xi_1-e<x-e\Rightarrow\frac{1}{\xi_1-e}>\frac{1}{x-e}\Leftrightarrow\frac{f(\xi_1)-e}{\xi_1-e}>\frac{f(\xi_1)-e}{x-e}\Leftrightarrow$

$$\frac{F(x)}{x-e}>\frac{f(\xi_1)-e}{x-e}\Leftrightarrow f(\xi_1)-e<F(x)\Leftrightarrow e^{\ln^2\xi_1}<\int_e^x\frac{f(u)-e}{u-e}du+e$$

Δ5. Επειδή $F'(x)=\left(\int_e^x\frac{f(u)-e}{u-e}du\right)'=\frac{f(x)-e}{x-e}$, είναι $F'(\alpha)=\frac{f(\alpha)-e}{\alpha-e}$

Από το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχει $\xi\in(e,\alpha)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f(e)}{\alpha-e}=\frac{f(\alpha)-e}{\alpha-e}=F'(\alpha)$$