3ο **ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

(ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΝΕΑ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ)

ΘΕΜΑ Α

Α1 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : f(\chi) = \alpha^{\chi}$, όπου $\alpha > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει : $f'(\chi) = \alpha^{\chi} \cdot \ell n\alpha$. **Μονάδες 5**

Α2 . Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f και σε $A(\chi_0 \ , f(\chi_0))$ ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f . Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτόμενης και του συντελεστή διεύθυνσης της για τη συνάρτηση f στο σημείο της Α . **Μονάδες 4**

Α3 . Θεωρούμε τον ισχυρισμό : « Εάν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta = [\alpha , \chi_0] \cup (\chi_0 \ , \beta]$, όπου $\alpha < \chi_0 < \beta$, η οποία :

- δεν είναι συνεχής στο χ_0 ,
- είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[\alpha , \chi_0]$ και $(\chi_0 \ , \beta]$ με το ίδιο είδος μονοτονίας ,

τότε , αναγκαστικά η συνάρτηση f θα είναι γνησίως μονότονη και στο διάστημα Δ . »

α . Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α , αν είναι αληθής , ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας . (μονάδες 5)

β . Να δώσετε κατάλληλο παράδειγμα συνάρτησης ορισμένης σε ένα διάστημα $\Delta = [\alpha , \chi_0] \cup (\chi_0 \ , \beta]$, όπου $\alpha < \chi_0 < \beta$, η οποία να ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις και να είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ . (μονάδες 6)

Μονάδες 11

Α4 . Να γράψετε στο τετράδιό σας ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς .

(i) Αν ισχύει : $f(\chi) > \ell n(|\chi|)$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}^*$, τότε : $\lim\limits_{\chi \to +\infty} f(\chi) = \lim\limits_{\chi \to -\infty} f(\chi)$.

(ii) Αν ισχύει : $f(\chi) \cdot f'(\chi) \neq 0$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , f^{-1} ταυτίζονται , τότε $f(0) = 1$.

(iii) Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f , g ισχύει : $f'(\chi) = g'(3-\chi)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια , ώστε να ισχύει : $f(\chi) = g(3-\chi) + c$.

(iv) Αν για τις συναρτήσεις f , g , h για τις οποίες ισχύουν :

- $h(\chi) \leq f(\chi) \leq g(\chi)$ « κοντά στο χ_0 »
- $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} h(\chi) = \ell_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} g(\chi) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ με $\ell_1 \neq \ell_2$, τότε αναγκαστικά δεν υπάρχει

το $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} f(\chi)$.

(v) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha , \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α , β) και ισχύει : $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε δεν υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha , \beta)$ τέτοιο , ώστε να ισχύει : $f'(\chi_0) = 0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0 , 1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$\left(f(\chi)\right)^{2021} + 2020 \cdot f(\chi) = 2021 \cdot \chi$, για κάθε $\chi \in [0 , 1]$.

Β1 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0 , 1]$

Μονάδες 6

Β2 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0 , 1]$ και να ορίσετε την αντίστροφή της συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 5

Δίνεται ότι ο τύπος της συνάρτησης f^{-1} είναι : $f^{-1}(\chi) = \dfrac{\chi^{2021} + 2020 \cdot \chi}{2021}$, για κάθε $\chi \in [0 , 1]$.

Β3 . Να διατάξετε τις συναρτήσεις χ , $f(\chi)$, $f^{-1}(\chi)$ στο διάστημα $(0 , 1)$ σε αύξουσα σειρά .

Μονάδες 5

Β4 . Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $h = f^{-1} \circ f$ και $g = f \circ f^{-1}$ είναι ίσες .

Μονάδες 3

Β5 . Να βρείτε , εάν υπάρχουν , τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(\chi) = \begin{cases} \dfrac{\ell n\left(\chi^2 + 1\right)}{\chi} & , \chi \neq 0 \\ 0 & , \chi = 0 \end{cases}$

Γ1 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ2 . Να αποδείξετε ότι :

(α) $\ell n\left(\chi^2 + 1\right) \geq \dfrac{\chi^2}{\chi^2 + 1}$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$,

(β) η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$ με $f'(0) = 1$.

Μονάδες 7

Γ3 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0 , 1]$.

Μονάδες 6

Γ4 . Θεωρούμε τα σημεία $A(0\ ,\ f(0))$, $B(1\ ,\ f(1))$ και ονομάζουμε :

- (ε) την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f (C_f) στο σημείο της A .
- (ζ) την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A , B .

Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της C_f του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(0\ ,\ 1)$ βρίσκεται «κάτω» από την ευθεία (ε) και «πάνω» από την ευθεία (ζ) .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0\ ,+\infty)$, τέτοια ώστε να ισχύουν : $f(0)=\alpha$ και $f'(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση : $\alpha^3\cdot f''(\chi)+2\cdot f^2(\chi)+4\chi\cdot f(\chi)\cdot f'(\chi)=0$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha>0$ είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός . Δίνονται επίσης και οι συναρτήσεις $h:h(\chi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\chi^2}$, $g:g(\chi)=\frac{\alpha}{\chi}$, όπου $\alpha>0$.

Δ1 . Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(\chi)=\frac{\alpha^3}{\chi^2+\alpha^2}$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

(**<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>** : Η παραπάνω συνάρτηση είναι γνωστή στη διεθνή βιβλιογραφία και ως « συνάρτηση versiera » ή έμεινε στην ιστορία ως « μάγισσα της Agnesi » και την μελέτησε η Ιταλίδα μαθηματικός Maria Agnesi το 1748 .)

Δ2 . Αν οι συναρτήσεις f , h έχουν το ίδιο τοπικό μέγιστο , να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , h έχουν τρία τουλάχιστον κοινά σημεία .

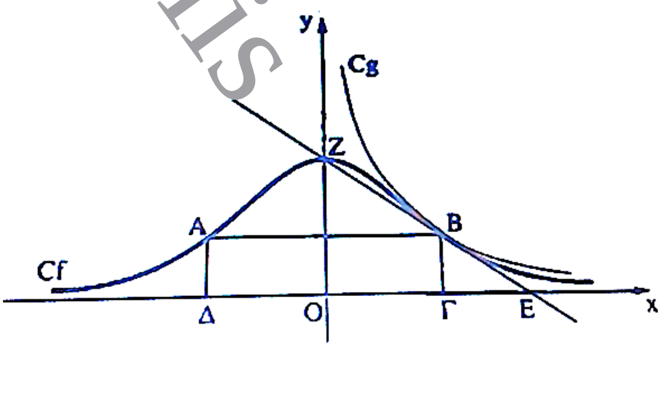
Μονάδες 6

Έστω ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο $M(\chi_0\ ,\psi_0)$.

Δ3 . Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και ότι οι C_f , C_g εφάπτονται στο σημείο M και να γράψετε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης στο σημείο M .

Μονάδες 6

Δ4 . Πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f εγγράφουμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, τέτοιο ώστε οι κορυφές A , B να ανήκουν στη C_f και οι Γ , Δ στον άξονα $\chi'\chi$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα . Να βρείτε το ορθογώνιο με το μέγιστο εμβαδόν και να αποδείξετε ότι είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο που σχηματίζει η



παραπάνω εφαπτομένη με τους θετικούς ημιάξονες $O\chi$ και $O\psi$, όπου $O=O(0\ ,\ 0)$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΕΙΣ 3ου ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝ. Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
(ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΝΕΑ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ)

ΘΕΜΑ Α

Α1 . Έχουμε : $\psi=\alpha^{\chi}=e^{\chi\cdot\ell n\alpha}$ και , αν θέσουμε $u=\chi\cdot\ell n\alpha$, τότε έχουμε $\psi=e^{u}$. Επομένως

$\psi'=e^{u}\cdot u'=e^{\chi\cdot\ell n\alpha}\cdot(\chi\cdot\ell n\alpha)'=\alpha^{\chi}\cdot\ell n\alpha$, $\alpha>0$.

Α2 . Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A την ευθεία $(\varepsilon)\to\psi-f(\chi_0)=\lambda\cdot(\chi-\chi_0)$ που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , όπου το λ ονομάζεται και κλίσης της ευθείας και ισούται με την παράγωγο της f στο χ_0 , δηλαδή $\lambda=f'(\chi_0)$.

Α3 . α . Ο ισχυρισμός είναι ψευδής , διότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$f:\ f(\chi)=\begin{cases}\chi+1\ ,\ \chi\in[1\ ,\ 2]\\ \dfrac{\chi}{3}+1\ ,\ \chi\in(2\ ,\ 5]\end{cases}$, διαπιστώνουμε ότι : η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο

$\chi_0=2$, καθώς και $f\nearrow[1\ ,\ 2]$, $f\nearrow(2\ ,\ 5]$, αλλά αν πάρουμε

$\chi_1=1{,}5\in[1\ ,\ 2]<\chi_2=2{,}5\in(2\ ,\ 5]\Rightarrow f(\chi_1)=2{,}5>f(\chi_2)\simeq1{,}8$.

β . Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f:\ f(\chi)=\begin{cases}2-\chi^5\ ,\ \chi\in[-3\ ,\ 0)\\ 1-\sqrt{\chi}\ ,\ \chi\in[0\ ,\ 3]\end{cases}$, διαπιστώνουμε ότι : η

συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $\chi_0=0$, καθώς και $f\searrow[-3\ ,\ 0)$, $f\searrow[0\ ,\ 3]$, και ακόμη , αν πάρουμε τυχαίο $\chi_1\in[-3\ ,\ 0)$ και τυχαίο $\chi_2\in[0\ ,\ 3]$ με $\chi_1<\chi_2$ έχουμε :

$\chi_1<0\Rightarrow\chi_1^5<0\Rightarrow-\chi_1^5>0\Rightarrow2-\chi_1^5>2\Rightarrow f(\chi_1)>2$ και

$\chi_2\ge0\Rightarrow\sqrt{\chi_2}\ge0\Rightarrow-\sqrt{\chi_2}\le0\Rightarrow1-\sqrt{\chi_2}\le1\Rightarrow f(\chi_2)\le1$, άρα $f(\chi_1)>f(\chi_2)$, οπότε $f\searrow[-3\ ,\ 3]$.

Α4 . (i) Σωστό (διότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(\ell n|\chi|)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}f(\chi)=+\infty$ και για $\chi\to-\chi$ έχουμε

$f(-\chi)>\ell n(|\chi|)$, άρα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}f(-\chi)=+\infty\overset{-\chi=u}{\Rightarrow}\lim\limits_{u\to-\infty}f(u)=+\infty$.)

(ii) Λάθος (διότι για την $1-1$ συνάρτηση $f:f(\chi)=2-\chi$ ισχύει : $f(\chi)\cdot f'(\chi)\neq0$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ και $f(\chi)=f^{-1}(\chi)$, αλλά $f(0)=2\neq1$.)

(iii) Λάθος (διότι $f'(\chi)=g'(3-\chi)\Rightarrow f'(\chi)=(-g(3-\chi))'\Rightarrow f(\chi)=-g(3-\chi)+c$, $c\in\mathbb{R}$)

(iv) Λάθος (διότι για παράδειγμα ισχύει : $-1\le\eta\mu\chi\le1$ και υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to0}(\eta\mu\chi)=0$)

Μάνος Μαυρογιάννης

(v) **Λάθος** (διότι για τη συνάρτηση $f:[-1\,,\,2]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(\chi)=\chi^2$ ισχύει $f(-1)\neq f(2)$, αλλά ισχύει : $f'(0)=0$)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0\,,\,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$\left(f(\chi)\right)^{2021}+2020\cdot f(\chi)=2021\cdot\chi$, για κάθε $\chi\in[0\,,\,1]$.

Β1 . Θα αποδείξουμε αρχικά ότι : $f(\chi)\geq 0$, για κάθε $\chi\in[0\,,\,1]$ και στη συνέχεια ότι : $f(0)=0$, $f(1)=1$.

Έχουμε : $f(\chi)\cdot\underbrace{\left[\left(f(\chi)\right)^{2020}+2020\right]}_{>0}=2021\cdot\chi\geq 0$, για κάθε $\chi\in[0\,,\,1]$, άρα $f(\chi)\geq 0$.

Για $\chi=0$ παίρνουμε : $f(0)\cdot\underbrace{\left[\left(f(0)\right)^{2020}+2020\right]}_{>0}=0\Rightarrow f(0)=0$, ενώ για $\chi=1$ παίρνουμε :

$\left(f(1)\right)^{2021}+2020\cdot f(1)=2021$, η οποία έχει προφανή λύση την $f(1)=1$. Αν $f(1)>1\Rightarrow f(1)^{2021}>1$, $2020\cdot f(1)>2020$, άρα $\left(f(1)\right)^{2021}+2020\cdot f(1)>2021$, το οποίο είναι άτοπο . Όμοια , σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι : $f(1)<1$. Άρα $f(1)=1$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι όριο $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$, όπου $\chi_0\in(0\,,\,1)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός και στη συνέχεια ότι : $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}\in\mathbb{R}$.

Για $\chi=\chi_0\in(0\,,\,1)$ η δοθείσα σχέση γίνεται : $\left(f(\chi_0)\right)^{2021}+2020\cdot f(\chi_0)=2021\cdot\chi_0$.
Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε :

$$\left(f(\chi)\right)^{2021}-\left(f(\chi_0)\right)^{2021}+2020\cdot\left(f(\chi)-f(\chi_0)\right)=2021\cdot(\chi-\chi_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\left(f(\chi)-f(\chi_0)\right)\right]\cdot\underbrace{\left[\left(f(\chi)\right)^{2020}+\left(f(\chi)\right)^{2019}\cdot f(\chi_0)+\left(f(\chi)\right)^{2018}\cdot f^2(\chi_0)+\ldots+\left(f(\chi_0)\right)^{2020}+2020\right]}_{>0}=$$

$$=2021\cdot(\chi-\chi_0)\underset{\chi\neq\chi_0}{\Rightarrow}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\frac{2021}{\left(f(\chi)\right)^{2020}+\left(f(\chi)\right)^{2019}\cdot f(\chi_0)+\ldots+\left(f(\chi_0)\right)^{2020}+2020}\Rightarrow$$

$$\overset{f\text{ συνεχής στο }\chi_0}{\Rightarrow}\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\frac{2021}{2021\cdot\left(f(\chi_0)\right)^{2020}+2020}\in\mathbb{R}\ .$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0\,,\,1)$. Έχουμε :

$$\lim_{\chi\to 0^+}\frac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{f(\chi)}{\chi}=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{2021}{f(\chi)^{2020}+2020}\overset{f\text{ συνεχής στο }\chi_1=0}{=}\frac{2021}{f(0)^{2020}+2020}=\frac{2021}{2020}\in\mathbb{R}\ .$$

Επίσης έχουμε :

$$\left(f(\chi)\right)^{2021}-1+2020\cdot\left(f(\chi)-1\right)=2021\cdot(\chi-1)\overset{\chi\neq 1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\frac{f(\chi)-1}{\chi-1}=\frac{2021}{\left(f(\chi)\right)^{2020}+\left(f(\chi)\right)^{2019}+...+1+2020}\overset{f\ \text{συνεχής στο}\ \chi_2=1}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{\chi\to 1^-}\frac{f(\chi)-1}{\chi-\chi_0}=\frac{2021}{2021+2020}=\frac{2021}{4041}\in\mathbb{R}\ .$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0\ ,\ 1]$.

Β2 . Παραγωγίζοντας την αρχική σχέση κατά μέλη παίρνουμε :

$$2021\cdot\left(f(\chi)\right)^{2020}\cdot f'(\chi)+2020\cdot f'(\chi)=2021\Rightarrow f'(\chi)\cdot\left(\underbrace{\left(f(\chi)\right)^{2020}+2020}_{>0}\right)=2021>0\Rightarrow f'(\chi)>0\ ,$$

για κάθε $\chi\in[0\ ,\ 1]$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0\ ,\ 1]$, οπότε και $1-1$, άρα αντιστρέφεται και έχει σύνολο τιμών : $f([0\ ,\ 1])=[f(0)\ ,\ f(1)]=[0\ ,\ 1]$. Θέτουμε

$$f(\chi)=\psi\Rightarrow\psi^{2021}+2020\cdot\psi=2021\cdot\chi\Rightarrow\chi=\frac{\psi^{2021}+2020\cdot\psi}{2021}\Rightarrow f^{-1}(\chi)=\frac{\chi^{2021}+2020\cdot\chi}{2021}$$

, για τη συνάρτηση $f^{-1}:\ [0\ ,\ 1]\to[0\ ,\ 1]$.

Β3 . Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\kappa:\kappa(\psi)=\dfrac{\psi^{2021}+2020\cdot\psi}{2021}$, όπου $\psi\in(0\ ,\ 1)$, η αρχική σχέση γίνεται $\kappa:\kappa\left(f(\chi)\right)=\chi$. Η συνάρτηση κ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0\ ,\ 1)$, διότι είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,\ 1)$ με $\kappa'(\psi)=\dfrac{2021\cdot\psi^{2020}+2020}{2021}>0$. Έχουμε :

$0<\psi<1\Rightarrow\psi^{2020}<1\overset{\psi>0}{\Rightarrow}\psi^{2021}<\psi\Rightarrow\psi^{2021}+2020\cdot\psi<2021\cdot\psi\Rightarrow\kappa(\psi)<\psi$, για κάθε $\psi\in(0\ ,\ 1)$, άρα για $\psi=f(\chi)\in(0\ ,\ 1)$, έχουμε $\kappa\left(f(\chi)\right)<f(\chi)\Rightarrow\chi<f(\chi)$, για κάθε $\chi\in(0\ ,\ 1)$.

Έχουμε επίσης : $f(\chi)>\chi=f\left(f^{-1}(\chi)\right)\overset{f\nearrow(0\ ,\ 1)}{\Rightarrow}\chi>f^{-1}(\chi)$, για κάθε $\chi\in(0\ ,\ 1)$. Τελικά παίρνουμε : $f^{-1}(\chi)<\chi<f(\chi)$, για κάθε $\chi\in(0\ ,\ 1)$.

Β4 . Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού $A_h=A_f=[0\ ,\ 1]$ και ισχύει :
$h(\chi)=\left(f^{-1}\circ f\right)(\chi)=f^{-1}\left(f(\chi)\right)=\chi$, για κάθε $\chi\in[0\ ,\ 1]$. Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού $A_g=f([0\ ,\ 1])=[0\ ,\ 1]$ και ισχύει : $g(\chi)=\left(f\circ f^{-1}\right)(\chi)=f\left(f^{-1}(\chi)\right)=\chi$, για κάθε $\chi\in[0\ ,\ 1]$, άρα $h=g$.

Β5 . Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(\chi)=f^{-1}(\chi)$, όπου $\chi \in A_f \cap A_{f^{-1}}=[0\ ,\ 1]$. Ισχύει

η ισοδυναμία $f(\chi)=f^{-1}(\chi) \overset{f\nearrow[0\ ,\ 1]}{\Leftrightarrow} f^{-1}(\chi)=\chi$. Άρα

$$f(\chi)=f^{-1}(\chi) \overset{f\nearrow[0\ ,\ 1]}{\Leftrightarrow} f^{-1}(\chi)=\chi \Rightarrow \frac{\chi^{2021}+2020\cdot\chi}{2021}=\chi \Rightarrow \chi^{2021}+2020\cdot\chi=2021\cdot\chi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi^{2021}-\chi=0 \Rightarrow \chi\cdot\left(\chi^{2020}-1\right)=0 \Rightarrow \chi=0 \text{ ή } \chi=1 \text{ ή } \chi=-1\notin[0\ ,\ 1] \text{ (απορρίπτεται)} .$$

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι τα $O\left(0\ ,\ f(0)=0\right)$ και $A\left(1\ ,\ f(1)=1\right)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 . Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πηλίκο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων . Θα αποδείξουμε ότι είναι συνεχής $\chi_0=0$.

(**Παρατήρηση :** Επειδή οι κανόνες de l ' Hospital είναι εκτός εξεταστέας ύλης Πανελλαδικών Εξετάσεων τα παρακάτω όρια που θα προκύψουν θα λυθούν με το κριτήριο παρεμβολής .)

Από γνωστή εφαρμογή του βιβλίου ισχύει : $\ell n\chi \le \chi-1$, για κάθε $\chi>0$, οπότε για $\chi \to \chi^2+1\ge 1$

παίρνουμε : $0\le \ell n\left(\chi^2+1\right)\le \chi^2$. Αν $\chi>0$, τότε έχουμε : $0\le \dfrac{\ell n\left(\chi^2+1\right)}{\chi}\le \chi$, άρα από κριτήριο

παρεμβολής θα ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{\ell n\left(\chi^2+1\right)}{\chi}=0$, ενώ αν $\chi<0$, τότε έχουμε : $\chi\le \dfrac{\ell n\left(\chi^2+1\right)}{\chi}\le 0$, άρα

από κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{\ell n\left(\chi^2+1\right)}{\chi}=0$ και επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0^-}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^+}f(\chi)=f(0)=0$

, η συνάρτηση f είναι συνεχής και στο $\chi_0=0$, οπότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ2 . **(α)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι : $\left(\chi^2+1\right)\cdot\ell n\left(\chi^2+1\right)-\chi^2\ge 0$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$. Αν θέσουμε

$\chi^2=\psi\ge 0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $h: h(\psi)=(\psi+1)\cdot\ell n(\psi+1)-\psi$, όπου $\psi\ge 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0\ ,+\infty)$ ως γινόμενο , διαφορά και σύνθεση

παραγωγισίμων συναρτήσεων με $h'(\psi)=\ell n(\psi+1)+(\psi+1)\cdot\dfrac{1}{(\psi+1)}-1=\ell n(\psi+1)\ge 0$,

με $h'(0)=0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0\ ,+\infty)$, οπότε για

$\psi\ge 0 \Rightarrow h(\psi)\ge h(0)=0$.

(β) Έχουμε : $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\ell n\left(\chi^2+1\right)}{\chi^2}$. Από τα παραπάνω αποδείξαμε ότι

$$\frac{\chi^2}{\chi^2+1}\le \ell n\left(\chi^2+1\right)\le \chi^2 \overset{\chi^2>0 \text{ "κοντά στο 0"}}{\Rightarrow} \frac{1}{\chi^2+1}\le \frac{\ell n\left(\chi^2+1\right)}{\chi^2}\le 1$$ και , επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{\chi^2+1}=1$,

από κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\ell n(\chi^2+1)}{\chi^2}=1$, άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$ με $f'(0)=1$.

Γ3 . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως πηλίκο και σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(\chi)=\frac{\left(\ell n(\chi^2+1)\right)'\cdot\chi-\ell n(\chi^2+1)}{\chi^2}=\frac{\dfrac{2\cdot\chi^2}{\chi^2+1}-\ell n(\chi^2+1)}{\chi^2}=\frac{2\cdot\chi^2-(\chi^2+1)\cdot\ell n(\chi^2+1)}{\chi^2\cdot(\chi^2+1)} .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:g(\chi^2)=2\cdot\chi^2-(\chi^2+1)\cdot\ell n(\chi^2+1)$, όπου $\chi\in[0\ ,\ 1]$. Αν θέσουμε $\chi^2=\psi\in[0\ ,\ 1]$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\psi)=2\cdot\psi-(\psi+1)\cdot\ell n(\psi+1)$, όπου $\psi\in[0\ ,\ 1]$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0\ ,\ 1]$ με

$g'(\psi)=2-\ell n(\psi+1)-(\psi+1)\cdot\dfrac{1}{(\psi+1)}=1-\ell n(\psi+1)$. Έχουμε :

$$0\le\psi\le 1\Rightarrow 1\le\psi+1\le 2\Rightarrow 0\le\ell n(\psi+1)\le\ell n2\Rightarrow-\ell n2\le-\ell n(\psi+1)\le 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0<1-\ell n2\le 1-\ell n(\psi+1)\le 1\Rightarrow g'(\psi)>0\Rightarrow g\nearrow[0\ ,\ 1]$$

Για $\psi\ge 0\Rightarrow g(\psi)\ge g(0)=0$, άρα $f'(\chi)>0$, για κάθε $\chi\in[0\ ,\ 1]$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0\ ,\ 1]$.

Γ4 . Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η εξής : $\psi-f(0)=f'(0)\cdot(\chi-0)\Rightarrow\psi=\chi$.

Η εξίσωση της ευθείας (ζ) είναι η εξής : $\psi-f(0)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}\cdot(\chi-0)\Rightarrow\psi=\chi\cdot\ell n2$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\chi_1\in(0\ ,\ 1)$ ισχύει

$\chi_1\cdot\ell n2<f(\chi_1)<\chi_1\Rightarrow\chi_1^2\cdot\ell n2<\ell n(\chi_1^2+1)<\chi_1^2$. Αρχικά είχαμε αποδείξει ότι για κάθε $\chi>0$ ισχύει : $0\le\ell n(\chi^2+1)\le\chi^2$, άρα για κάθε $\chi_1\in(0\ ,\ 1)$ ισχύει : $\ell n(\chi_1^2+1)<\chi_1^2$. Για να αποδείξουμε ότι για κάθε $\chi_1\in(0\ ,\ 1)$ ισχύει $\ell n(\chi_1^2+1)>\chi_1^2\cdot\ell n2$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$h:h(\chi)=\ell n(\chi^2+1)-\chi^2\cdot\ell n2$, όπου $\chi\in(0\ ,\ 1)$. Έχουμε : $h(\chi)=\chi^2\cdot\left[\dfrac{\ell n(\chi^2+1)}{\chi^2}-\ell n2\right]$ και

θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa:\kappa(\psi)=\dfrac{\ell n(\psi+1)}{\psi}$, όπου $\psi=\chi^2\in(0\ ,\ 1)$. Η συνάρτηση κ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,\ 1)$ ως πηλίκο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\kappa'(\psi)=\frac{\left(\ell n(\psi+1)\right)'\cdot\psi-\psi'\cdot\left(\ell n(\psi+1)\right)}{\psi^2}=\frac{\dfrac{\psi}{\psi+1}-\ell n(\psi+1)}{\psi^2}=\frac{\psi-(\psi+1)\ .\ \ell n(\psi+1)}{(\psi+1)\cdot\psi^2} .$$

Η συνάρτηση $\varphi : \varphi(\psi)=\psi-(\psi+1)\cdot\ell n(\psi+1)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,\ 1)$ με

$\varphi'(\psi)=1-\ell n(\psi+1)-(\psi+1)\cdot\dfrac{1}{\psi+1}=-\ell n(\psi+1)<0$, διότι $1<\psi+1<2$, άρα η συνάρτηση

φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\ ,\ 1)$, οπότε για $\chi>0\Rightarrow\varphi(\chi)<\varphi(0)=0$, άρα $\kappa'(\psi)<0$,

δηλαδή η συνάρτηση κ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\ ,\ 1)$, άρα για

$\psi<1\Rightarrow\kappa(\psi)>\kappa(1)=\ell n2$, άρα $h(\chi_1)>0$, για κάθε $\chi_1\in(0\ ,\ 1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 . Έχουμε : $\alpha^3\cdot f''(\chi)+2\cdot f^2(\chi)+4\chi\cdot f(\chi)\cdot f'(\chi)=0\Rightarrow\left(\alpha^3\cdot f'(\chi)+2\chi\cdot f^2(\chi)\right)'=0$, οπότε

$\alpha^3\cdot f'(\chi)+2\chi\cdot f^2(\chi)=c$, όπου $c\in\mathbb{R}$. Για $\chi=0\Rightarrow\alpha^3\cdot f'(0)+2\cdot 0\cdot f^2(0)=c\Rightarrow c=0$, άρα

παίρνουμε : $\alpha^3\cdot f'(\chi)+2\chi\cdot f^2(\chi)=0\overset{f(\chi)>0}{\Rightarrow}\alpha^3\cdot\dfrac{f'(\chi)}{f^2(\chi)}+2\cdot\chi=0\Rightarrow\left(-\dfrac{\alpha^3}{f(\chi)}+\chi^2\right)'=0$, οπότε

έχουμε : $-\dfrac{\alpha^3}{f(\chi)}+\chi^2=c_1$, όπου $c_1\in\mathbb{R}$. Για $\chi=0\Rightarrow-\dfrac{\alpha^3}{f(0)}+0^2=c_1\overset{f(0)=\alpha}{\Rightarrow}c_1=-\alpha^2$, άρα

έχουμε : $-\dfrac{\alpha^3}{f(\chi)}+\chi^2=-\alpha^2\Rightarrow\dfrac{\alpha^3}{f(\chi)}=\chi^2+\alpha^2\Rightarrow f(\chi)=\dfrac{\alpha^3}{\chi^2+\alpha^2}$, $\chi\in\mathbb{R}$.

Δ2 . Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων

με $g'(\chi)=-\dfrac{2\chi}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\chi^2}$. Έχουμε $g'(\chi)=0\Rightarrow\chi=0$. Για $\chi>0\Rightarrow g'(\chi)<0$, ενώ για

$\chi<0\Rightarrow g'(\chi)>0$, οπότε στο $\chi_0=0$ η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$g(0)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$. Έχουμε : $f'(\chi)=\dfrac{-2\alpha^3\cdot\chi}{(\chi^2+\alpha^2)^2}$. Για $\chi>0\Rightarrow f'(\chi)<0$, ενώ για

$\chi<0\Rightarrow f'(\chi)>0$, οπότε στο $\chi_0=0$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$f(0)=\alpha$. Επειδή οι συναρτήσεις f , g έχουν το ίδιο τοπικό μέγιστο , άρα $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, οπότε :

$f(\chi)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^3}{\chi^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{1}{\pi\cdot\sqrt{\pi}}}{\chi^2+\dfrac{1}{\pi}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\cdot(\pi\cdot\chi^2+1)}$. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των

συναρτήσεων f , g βρίσκονται από την εξίσωση :

$f(\chi)=g(\chi)\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\cdot(\pi\cdot\chi^2+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\chi^2}\Rightarrow e^{-\chi^2}\cdot(\pi\cdot\chi^2+1)-1=0$. Η συνάρτηση

$\kappa:\kappa(\chi)=e^{-\chi^2}\cdot(\pi\cdot\chi^2+1)-1$ έχει προφανή ρίζα τη $\chi=0$. Η συνάρτηση κ είναι συνεχής στο

$[1\ ,2]$ ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων με

$\kappa(1) = e^{-1}\cdot(\pi+1)-1 = \dfrac{\pi+1}{e}-1 = \dfrac{\pi+1-e}{e} > 0$,

$\kappa(2) = e^{-4}\cdot(4\cdot\pi+1)-1 = \dfrac{4\cdot\pi+1}{e^4}-1 = \dfrac{4\cdot\pi+1-e^4}{e^4} < 0$, άρα $\kappa(1)\cdot\kappa(2) < 0$, οπότε από Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (1\ ,\ 2)\ :\ \kappa(\chi_0)=0$. Έπειδή η συνάρτηση κ είναι άρτια (για κάθε $\chi\in\mathbb{R}\Rightarrow -\chi\in\mathbb{R}$ με $\kappa(-\chi)=\kappa(\chi)$) , θα ισχύει το Θ. Bolzano για τη συνάρτηση κ στο $[-2\ ,-1]$, άρα θα υπάρχει : $-\chi_0\in(-2\ ,-1)\ :\ \kappa(-\chi_0)=0$. Αποδείξαμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν τρία τουλάχιστον κοινά σημεία .

Δ3 . Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση : $f(\chi)=h(\chi)$ έχει μοναδική λύση .

$f(\chi)=h(\chi)\Rightarrow \dfrac{\alpha^3}{\chi^2+\alpha^2}=\dfrac{\alpha}{\chi}\overset{\alpha>0}{\Rightarrow}\alpha^2\cdot\chi=\chi^2+\alpha^2\Rightarrow\chi^2-\alpha^2\cdot\chi+\alpha^2=0$, οπότε θα πρέπει

$\Delta=0\ \Rightarrow\alpha^4-4\cdot\alpha^2=0\ \Rightarrow\alpha^2\left(\alpha^2-4\right)=0\overset{\alpha>0}{\Rightarrow}\alpha=2$. Με $\alpha=2$ έχουμε :

$f(\chi)=\dfrac{8}{\chi^2+4}$, $h(\chi)=\dfrac{2}{\chi}$. Η λύση της εξίσωσης : $f(\chi)=h(\chi)$ μας δίνει $\chi=2$ με

$f(2)=h(2)=1$ και $f'(\chi)=-\dfrac{16\cdot\chi}{\left(\chi^2+4\right)^2}$, $h'(\chi)=-\dfrac{2}{\chi^2}$, άρα $f'(2)=h'(2)=-\dfrac{1}{2}$, άρα στο

σημείο $M(2\ ,\ 1)$ οι C_f , C_h εφάπτονται και η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης στο σημείο M

θα είναι : $\psi-f(2)=f'(2)\cdot(\chi-2)\Rightarrow\psi=-\dfrac{1}{2}\cdot\chi+2$.

Δ4 . Έστω ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(\chi\ ,\ 0)$, όπου $\chi>0$, άρα $\Delta(-\chi\ ,\ 0)$ και το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τον τύπο :

$$E(\chi)=2\chi\cdot f(\chi)=2\chi\cdot\frac{8}{\chi^2+4}=\frac{16\cdot\chi}{\chi^2+4}\ ,\ \chi>0 .$$

Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,+\infty)$ ως ρητή με

$E'(\chi)=\dfrac{16\cdot\left(\chi^2+4\right)-16\chi\cdot2\chi}{\left(\chi^2+4\right)^2}=\dfrac{64-16\cdot\chi^2}{\left(\chi^2+4\right)^2}$. Έχουμε $E'(\chi)=0\overset{\chi>0}{\Rightarrow}\chi=2$.

Για $0<\chi<2\Rightarrow E'(\chi)>0$, ενώ για $\chi>2\Rightarrow E'(\chi)<0$. Άρα για $\chi=2\Rightarrow E_{max}=E(2)=4\ \tau.\mu$.

Όταν $\chi=2\Rightarrow B\equiv M(2\ ,\ 1)$. Η εφαπτομένη στο σημείο $B(2\ ,\ 1)$ τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο $E(4\ ,\ 0)$ και τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο $Z(0\ ,\ 2)$ και το εμβαδόν του τριγώνου OZE ισούται με $(OZE)=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{OZ}\ ,\ \overrightarrow{OE}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}0 & 2\\ 4 & 0\end{matrix}\right\|=4\ \tau.\mu$, άρα ισοδύναμο με το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

Μάνος Μαυρογιάννης