Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

2ο Διαγώνισμα

21-3-2020

Θέμα Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in A$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

μονάδες 7

Α2. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+2

Α4. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = [0,3]$, με $f(0)=2$, $f(1)=1$ και $f(3)=-1$.

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

Α) Υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

Β) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -1$.

Γ) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Δ) $[-1,2] \subseteq f(\Delta)$.

Ε) Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1.

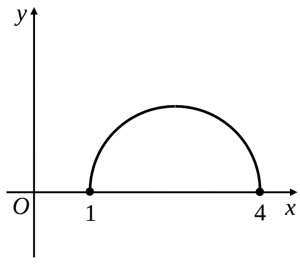
μονάδες 3

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x} = 0 \cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x} = 0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

γ) Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το διπλανό σχήμα, τότε:



i) το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$

ii) το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$

iii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,4)$

iv) υπάρχει $x_0 \in (1,4)$: $f'(x_0) = 0$.

μονάδες 2+2+4

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 + \beta}{x^3 + \alpha x}, x \in A$ και $g(x) = -\alpha x^4 + x^2(\alpha^2 - 3\beta) - \alpha\beta, x \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$.
- Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

B1. Να δείξετε ότι $A=\mathbb{R}^*$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Μονάδες 8

Για $\alpha=1$ και $\beta=2$:

B2. Να δείξετε ότι $f''(x)=2\dfrac{x^2\left(x^4+9x^2+6\right)+2}{\left(x^3+x\right)^3}, x\neq 0$ και στην συνέχεια ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

B3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να την χαράξετε στο $\mathbb{R}^*$.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ τέτοια ώστε

- σε κάθε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ έχει εφαπτομένη την ε: $\left[2x_0f(x_0)+x_0^3\right]x-x_0^2y-x_0^2f(x_0)-x_0{}^3=0$
- $2F(x)+x^2-x\geq x^2\ln x$ για κάθε $x>0$, όπου F μία παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ με $F(1)=0$.

Γ1. α) Να δείξετε ότι $f(1)=0$

μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2\ln x,\ x>0$

μονάδες 7

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{x^3-1}{9}$ είναι μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$.

μονάδες 2

Γ2. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x), & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

μονάδες 3

β) Να βρείτε μια παράγουσα της g.

μονάδες 4

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g και τον άξονα x΄x.

μονάδες 4

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(2x-1)\sqrt{e^{2x+1}}-2x-3$, $x\in\mathbb{R}$. Να δείξτε ότι:

Δ1. $f''(x)=\sqrt{e^{2x+1}}(2x+3)$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μονοτονία της f'.

μονάδες 3

Δ2. Η συνάρτηση f έχει μοναδικό ακρότατο στο $x_0>-\dfrac{3}{2}$.

μονάδες 5

Δ3. $f(x_0)<0$

μονάδες 5

Δ4. Η συνάρτηση f έχει ακριβώς δυο ρίζες x_1,x_2 .

μονάδες 6

Δ5. $x_1+x_2=-1$

μονάδες 6

Καλή τύχη!