59η Άσκηση

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση f η οποία έχει σταθερό όρο το 5 και για την οποία ισχύει ότι $f'(x)=20x^3-10\int_0^1 xf(t)dt+20,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=5x^4-30x^2+20x+5$.

β) Να δείξετε ότι η f έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^4+4x+1=6x^2$. Πόσες από τις ρίζες είναι ακέραιες;

δ) Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=x^4+4x+1$ και $h(x)=6x^2,\ x\in\mathbb{R}$, δέχονται κοινή εφαπτομένη στα κοινά τους σημεία.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)-6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,3)$.

Λύση

α) Είναι $f'(x)=20x^3-10\int_0^1 xf(t)dt+20=20x^3-10x\int_0^1 f(t)dt+20$.

Έστω $\int_0^1 f(t)dt=\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $f'(x)=20x^3-10\lambda x+20\Leftrightarrow f'(x)=\left(5x^4-5\lambda x^2+20x\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)=5x^4-5\lambda x^2+20x+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f έχει σταθερό όρο το 5, είναι $c=5$, οπότε $f(x)=5x^4-5\lambda x^2+20x+5$.

$\int_0^1 f(x)dx=\lambda\Leftrightarrow\int_0^1\left(5x^4-5\lambda x^2+20x+5\right)dx=\lambda\Leftrightarrow$

$\left[x^5-\frac{5\lambda}{3}x^3+10x^2+5x\right]_0^1=\lambda\Leftrightarrow 1-\frac{5\lambda}{3}+10+5=\lambda\Leftrightarrow 16=\frac{8\lambda}{3}\Leftrightarrow\lambda=6$.

Άρα $f(x)=5x^4-30x^2+20x+5,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x)=20x^3-60x+20=20\left(x^3-3x+1\right)$ και

$f''(x)=20\left(3x^2-3\right)=60\left(x^2-1\right)$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f'	↗		↘		↗

Για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$. Για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow[-1,1]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(20x^3-60x+20\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}20x^3=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}20x^3=+\infty$, $f'(-1)=60$ και $f'(1)=-20$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1)=(-\infty,60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$.Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[-1,1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2)=[-20,60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=0$.Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3=[-1,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_3)=[-20,+\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_3)$ υπάρχει μοναδικό x_3 στο εσωτερικό του Δ_3 τέτοιο, ώστε $f'(x_3)=0$.

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	1	x_3	$+\infty$
f'	$-\infty$ $-$ ↗	0	$+$ ↗ 60 ↘	0	↘ -20 $-$ ↗	0	$+$ ↗ $+\infty$
f	↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε	↗

Για κάθε $x<x_1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_1)=0\Rightarrow f\searrow(-\infty,x_1]$

Για κάθε $x_1<x<-1\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_1)=0\Rightarrow f\nearrow[x_1,-1]$.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_1)$. Για κάθε

$-1<x<x_2\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_2)=0\Rightarrow f\nearrow[-1,x_2]$.

Για κάθε $x_2<x<1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_2)=0\Rightarrow f\searrow[x_2,1]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(x_2)$.

Για κάθε $1<x<x_3\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_3)=0\Rightarrow f\searrow[1,x_3]$ και για κάθε

$x>x_3\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_3)=0\Rightarrow f\nearrow[x_3,+\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_3)$.

γ) $x^4+4x+1=6x^2 \Leftrightarrow x^4-6x^2+4x+1=0 \overset{:5}{\Leftrightarrow} 5x^4-30x^2+20x+5=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^4=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$

Είναι $x_1<-1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(-1)=-40<0$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,x_1)$,έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=(f(x_1),+\infty)$. Επειδή $0\in f(A_1)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_1\in A_1$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1)=0$.

Είναι $x_2<1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x_2)>f(1)=0>0$.

Η f είναι συνεχής στο -1, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=[x_1,x_2]$ και έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2)=[f(x_1),f(x_2)]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(A_2)$, υπάρχει μοναδικό ρ_2 στο εσωτερικό του A_2 τέτοιο, ώστε $f(\rho_2)=0$.

Επειδή $f(1)=0$, η εξίσωση έχει ρίζα το 1.

Η f είναι συνεχής στο $x=1$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_3=[x_2,x_3]$ και η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

Είναι $x_3>1 \overset{f\searrow[1,x_3]}{\Leftrightarrow} f(x_3)<f(1)=0$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_4=[x_3,+\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_4)=[f(x_3),+\infty)$. Επειδή $0\in f(A_4)$ η f έχει ρίζα ρ_3 στο A_4 . Τελικά η f έχει τέσσερις ρίζες

Ακέραια ρίζα της f είναι το 1.

Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 5, δηλαδή οι $\pm1,\pm5$.

Είναι $f(-1)=-40\neq0$ άρα το -1 δεν είναι ρίζα.

Είναι $f(5)=5\cdot5^4-30\cdot5^2+20\cdot5+5=3125-750+100+5=2480\neq0$ άρα το 5 δεν είναι ρίζα.

Είναι $f(-5)=5\cdot(-5)^4-30\cdot(-5)^2+20\cdot(-5)+5=3125-750-100+5=2280\neq0$ άρα το - 5 δεν είναι ρίζα. Μοναδική ακέραια ρίζα της f είναι το 1.

δ) Τα κοινά σημεία των C_h, C_g είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ άρα τα $x=\rho_1,\ x=\rho_2,\ x=1,\ x=\rho_3$.

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x=\rho_1$ πρέπει $h'(\rho_1)=g'(\rho_1)\Leftrightarrow h'(\rho_1)-g'(\rho_1)=0\Leftrightarrow f'(\rho_1)=0$ που είναι άτοπο. Όμοια για τις $x=\rho_2,\ x=1$ και $x=\rho_3$.

Άρα δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στα κοινά τους σημεία.

ε) $f(x)=g(x)-6\Leftrightarrow f(x)-g(x)+6=0\Leftrightarrow 5x^4-30x^2+20x+5-x^4-4x-1+6=0\Leftrightarrow$

$4x^4-30x^2+16x+10=0\Leftrightarrow(x-1)(4x^3+4x^2-26x-10)=0\Leftrightarrow$

$4x^3+4x^2-26x-10=0$

4	0	-30	16	10	1
	4	4	-26	-10	
4	4	-26	-10	0	

Έστω $t(x)=4x^3+4x^2-26x-10,\ x\in[1,3]$.

Είναι $t(1)=-28<0,\ t(3)=108+36-78-10=56>0$,

δηλαδή $t(1)t(3)<0$ και επειδή η t είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως πολυωνυμική, λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $t(x)=0\Leftrightarrow 4x^3+4x^2-26x-10=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,3)$.