Θέματα πανελλαδικών με γραφική παράσταση

1. ΘΕΜΑ Β 2019

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y = 2.

B1. Να αποδείξετε ότι λ = 2. Μονάδες 3

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (2, 3). Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4). Μονάδες 6

B4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ln(x-2),\ x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6). Μονάδες 9

2. ΘΕΜΑ Β 2018

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

B1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα. Μονάδες 8

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 4

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Μονάδες 6

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει) Μονάδες 7

3. ΘΕΜΑ Β 2018 επαναληπτικές

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x}, & x>1\\ x^2+\alpha, & x\le 1\end{cases}$.

B1. Να υπολογίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής. Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha=1$.

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2},4\right]$ Μονάδες 6

B3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\dfrac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά. Μονάδες 7

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση. Μονάδες 9

4. ΘΕΜΑ Β 2017

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$.

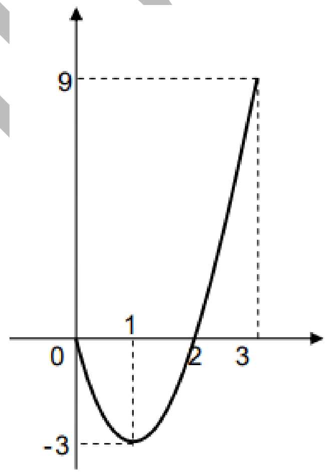
Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$. Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.) Μονάδες 7

5. Θέμα Γ 2017 επαναληπτικές



Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0,3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:
- $f(0)=2,\ f(1)=0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3)=2,\ f(2)=-2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας. μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f. μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$. μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. μονάδες 4

6. ΘΕΜΑ Β 2016

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία f η είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f. Μονάδες 6

Β2.
Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία f η είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης. Μονάδες 9

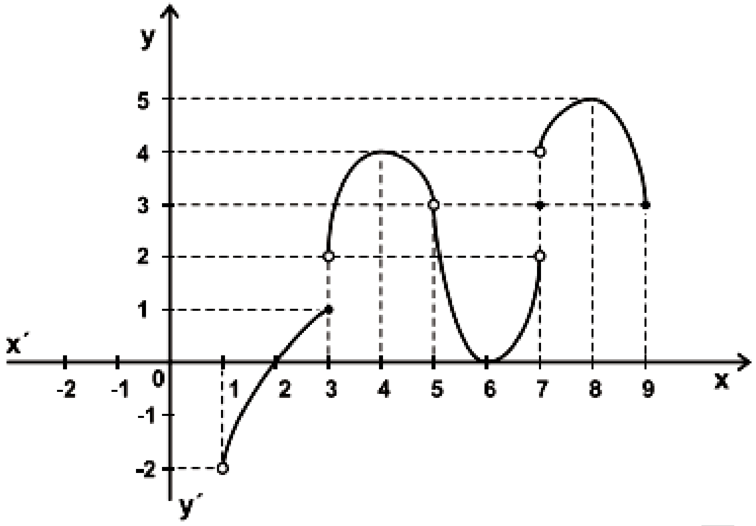
Β3.
Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 7

Β4.

Β5. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

7. ΘΕΜΑ Β 2016 επαναληπτικές

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f. Μονάδες 4

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μονάδες 7

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x))$

Μονάδες 9

B4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μονάδες 3

B5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0)=0$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μονάδες 6

1. ΘΕΜΑ Β 2019

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y = 2.

Β1. Να αποδείξετε ότι λ = 2. Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (2, 3). Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4). Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ln(x-2),\ x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6). Μονάδες 9

Λύση

Β1. Επειδή η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=0+\lambda=\lambda$, άρα $\lambda=2$.

Β2. Έστω $g(x)=f(x)-x=e^{-x}+2-x,\ x\in[2,3]$.

Είναι $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ άρα g γνησίως φθίνουσα στο $[2,3]$.

Είναι $g(2)=e^{-2}+2-2=e^{-2}>0,\ g(3)=e^{-3}+2-3=\frac{1}{e^3}-1<0$, δηλαδή $g(2)g(3)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-x=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$. Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα, η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

Β3. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

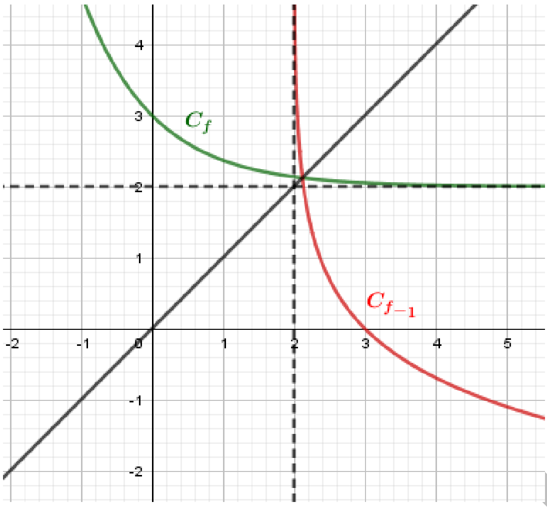
Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+2\right)=+\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(2,+\infty)$. Άρα $D_{f^{-1}}=(2,+\infty)$.

$f(x)=y\Leftrightarrow e^{-x}+2=y\Leftrightarrow e^{-x}=y-2\overset{y>2}{\Leftrightarrow}-x=\ln(y-2)\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$, άρα $f^{-1}(y)=-\ln(y-2),\ y>2$, οπότε $f^{-1}(x)=-\ln(x-2),\ x>2$.

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=-\lim\limits_{x\to2^+}\ln(x-2)\ \underset{\substack{x\to2^+\Rightarrow\\u\to0^+}}{\overset{x-2=u}{=}}\ -\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=+\infty$, άρα η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $f(0)=3$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,3).

Είναι $f^{-1}(x)=0\Leftrightarrow-\ln(x-2)=0\Leftrightarrow x-2=1\Leftrightarrow x=3$, οπότε η γραφική παράσταση της αντίστροφης τέμνει τον άξονα x΄x στο (3,0).



2. ΘΕΜΑ Β 2018

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{4}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει)

Μονάδες 7

Λύση

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$

Για κάθε $x<-2$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι

συνεχής στο -2, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$.

Για κάθε $x\in(-2,0)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-2-1=-3$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x^3+8	-	+	+	
x^3	-	-	+	
f'	+	-	+	
f	↗	Τ.Μ ↘	↗	

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f''(x)=-\frac{24}{x^4}$.

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$, οπότε η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Επειδή η f είναι κοίλη στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ δεν έχει σημεία καμπής.

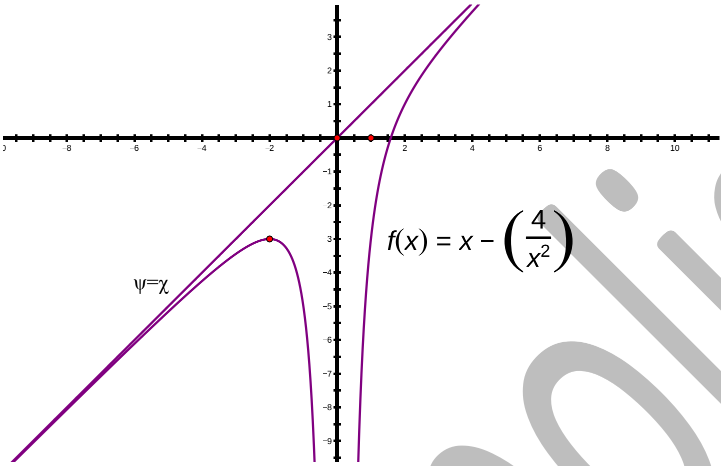
Β3. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, οπότε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη θα είναι στο $x=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$ άρα η $x=0$ (y΄y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

B4.



3. ΘΕΜΑ Β 2018 επαναληπτικές

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x}, & x>1\\ x^2+\alpha, & x\le 1\end{cases}$.

B1. Να υπολογίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής. Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha=1$.

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},4\right]$

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά. Μονάδες 7

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση. Μονάδες 9

Λύση

B1. Στο διάστημα $(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως ρητή. Στο διάστημα $(-\infty,1)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της μόνο όταν είναι συνεχής και στο $x=1$, δηλαδή όταν $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha\Leftrightarrow 2=1+\alpha\Leftrightarrow\alpha=1$

B2. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},4\right]$ αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$ με $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,4)$ με $f'(x)=2x$. Στο $x=1$είναι:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x+1-2x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}=-1,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2.$$

Επειδή $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$, οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},4\right)$, οπότε δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

Β3. Πρέπει να υπάρχουν $x_0\in\mathbb{R}:f'(x_0)=-\frac{1}{4}$.

Αν $x_0>1$ τότε $f'(x_0)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{x_0^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_0^2=4\overset{x_0>1}{\Leftrightarrow}x_0=2$

Αν $x_0<1$ τότε $f'(x_0)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2x_0=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_0=-\frac{1}{8}$.

Είναι $f(2)=\frac{3}{2},\ f\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{64}+1=\frac{65}{64}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=2$ έχει εξίσωση:

$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+2$

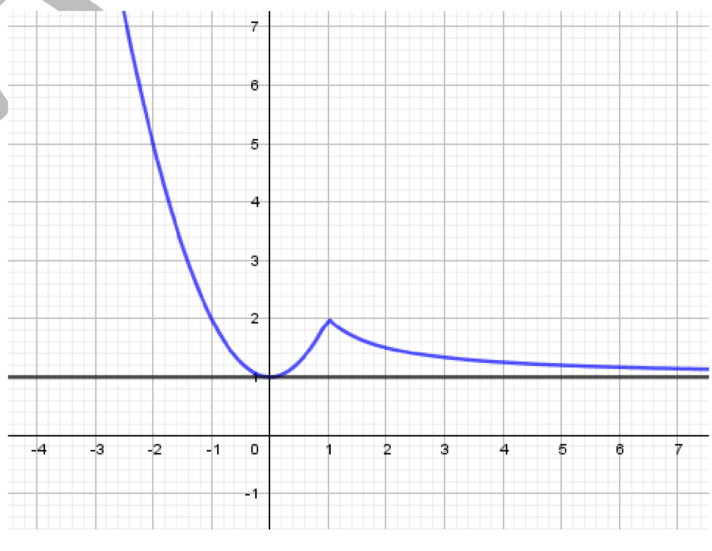
Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=-\frac{1}{8}$ έχει εξίσωση: $y-f\left(-\frac{1}{8}\right)=f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{63}{64}$

Β4. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=1$ οπότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Η f στο $-\infty$ είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού και δεν έχει ασύμπτωτες.

Για $x>1: f(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ απορρίπτεται και για $x\le1: f(x)=0\Leftrightarrow x^2=-1$ αδύνατη, δηλαδή η C_f δεν τέμνει τον άξονα x΄x. Είναι $f(0)=1$ οπότε η C_f τέμνει τον y΄y στο $(0,1)$.



4. ΘΕΜΑ Β 2017

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$. Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.) Μονάδες 7

Λύση

Β1. $A_{f\circ g}=\{x\in A_g\ /\ g(x)\in A_f\}=\left\{x\neq 1/\ \dfrac{x}{1-x}>0\right\}=\{x\neq 1/\ x\in(0,1)\}=(0,1)$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

Β2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h'(x)=\left(\ln x-\ln(1-x)\right)'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}>0\Rightarrow h\nearrow(0,1)\Rightarrow h\ 1-1$ οπότε η h αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\ln(1-x)\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\ln x-\ln(1-x)\right)=+\infty$.

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(0,1)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, οπότε $A_{h^{-1}}=\mathbb{R}$.

$h(x)=y\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=y\Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}=e^y\Leftrightarrow x=e^y-xe^y\Leftrightarrow x+xe^y=e^y\Leftrightarrow x\left(e^y+1\right)=e^y\Leftrightarrow$

$x=\dfrac{e^y}{e^y+1}$,άρα $h^{-1}(y)=\dfrac{e^y}{e^y+1},\ y\in\mathbb{R}$ οπότε $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$.

Β3. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$. Είναι $\varphi'(x)>0\Rightarrow\varphi\nearrow\mathbb{R}$, οπότε η φ δεν έχει ακρότατα. Η φ′ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi''(x)=\dfrac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$.

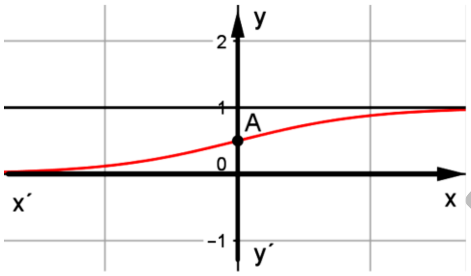
$\varphi''(x)\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}\geq 0 \underset{\left(e^x+1\right)^3>0}{\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}} 1-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq 1\Leftrightarrow x\leq 0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $\varphi''(x)>0$ άρα η φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $\varphi''(x)<0$ άρα η φ είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

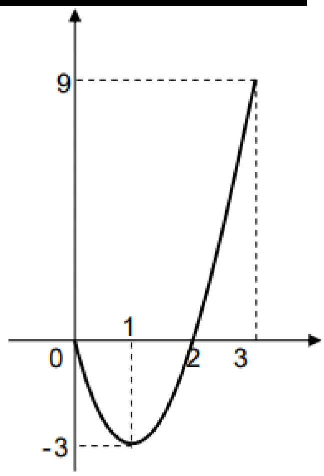
Η φ έχει σημείο καμπής το $A(0,\varphi(0))\equiv\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

B4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, οπότε ο άξονας $x΄x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1$, άρα η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$.



Θέμα Γ 2017 επαναληπτικές



Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0,3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:
- $f(0)=2,\ f(1)=0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3)=2,\ f(2)=-2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν,

τα $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f. μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$. μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. μονάδες 4

Λύση

Γ1. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ και δεν εφαρμόζεται το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα αυτό, ισχύει ότι $f(3)=f(0)=2$.

$$E=-\int_0^2 f'(x)dx+\int_2^3 f'(x)dx=8\Leftrightarrow -f(2)+f(0)+f(3)-f(2)=8\Leftrightarrow -2f(2)+2+2=8\Leftrightarrow f(2)=-2$$

.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}=\frac{f'(1)}{1}=-3\ ,\quad \lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)-2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0}\frac{1}{f'(x)}\underset{\substack{x\to0\Rightarrow\\ u\to0^-}}{\overset{f'(x)=u}{=}}\lim_{u\to0^-}\frac{1}{u}=-\infty$$

Γ2. Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[0,2]$.

Για κάθε $x \in (2,3)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [2,3]$.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 2 το $f(2) = -2$ και τοπικά μέγιστα τα $f(0) = 2$ και $f(3) = 2$.

$f' \searrow [0,1]$ και f συνεχής, άρα η f είναι κοίλη στο $[0,1]$.

$f' \nearrow [1,3]$ και f συνεχής, άρα η f είναι κυρτή στο $[1,3]$. Η f έχει σημείο καμπής το $(1, f(1)) \equiv (1,0)$

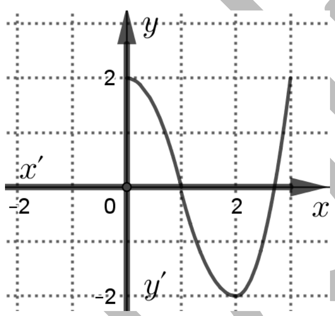
Γ3. Είναι $f(2)f(3) = -4 < 0$ και f συνεχής, άρα υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Είναι $2 < x < x_0 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) < f(x_0) = 0$, άρα $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{1}{f(x)} \underset{\substack{x \to x_0^- \Rightarrow \\ u \to 0^-}}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u \to 0^-} \dfrac{1}{u} = -\infty$ Μονάδα 1

Είναι $x_0 < x < 3 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) = 0$, άρα $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1}{f(x)} \underset{\substack{x \to x_0^- \Rightarrow \\ u \to 0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{1}{u} = +\infty$, οπότε δεν υπάρχει

το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$

Γ4.



5. ΘΕΜΑ Β 2016

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία f η είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f. Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία f η είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης. Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Λύση

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f′	−	0	+
f	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\dfrac{2-6x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$

$$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-6x^2}{\left(x^2+1\right)^3}\geq 0 \Leftrightarrow 2-6x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\leq x\leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	Σ.Κ	$\smile$	Σ.Κ	$\frown$

Για κάθε $x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$. Για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ είναι $f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

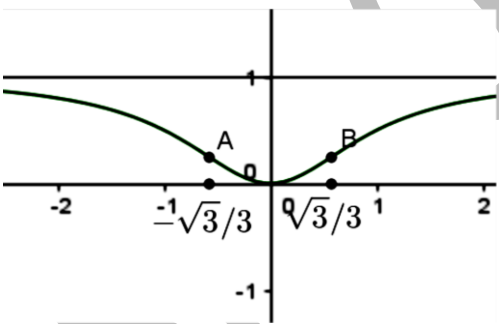
Η f έχει σημεία καμπής τα $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\equiv\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$ και $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\equiv\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$.

Β3. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$, άρα η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

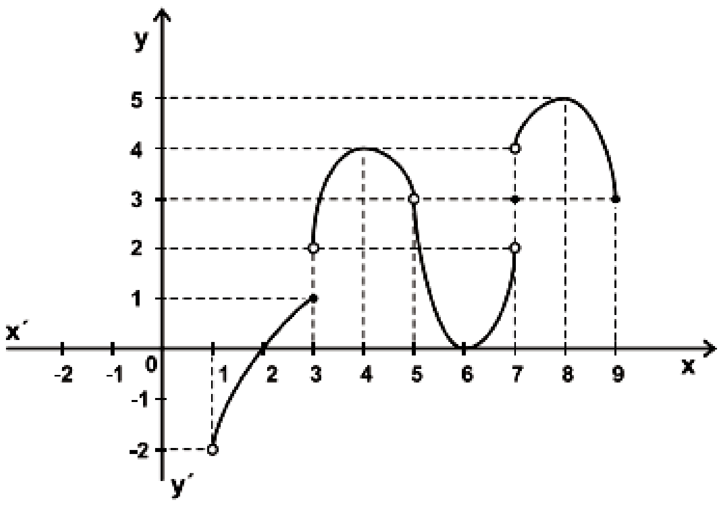
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$, άρα η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Β4.



6. ΘΕΜΑ Β 2016 επαναληπτικές

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f. Μονάδες 4

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim_{x\to 3} f(x)$ **γ)** $\lim_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim_{x\to 6}\frac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim_{x\to 8} f(f(x))$

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0)=0$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μονάδες 6

Λύση

Β1. $A_f=(1,5)\cup(5,10]$, $f(A)=[-2,5]$.

Β2. α) $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=-2$

β) Είναι $\lim_{x\to 3^-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 3^+} f(x)=2$. Επειδή $\lim_{x\to 3^-} f(x)\neq\lim_{x\to 3^+} f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 3} f(x)$.

γ) $\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^+} f(x)=3$ άρα $\lim_{x\to 5} f(x)=3$.

δ) Είναι $\lim_{x\to 7^-} f(x)=2$, $\lim_{x\to 7^+} f(x)=4$. Επειδή $\lim_{x\to 7^-} f(x)\neq\lim_{x\to 7^+} f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 7} f(x)$.

ε) $\lim_{x\to 9} f(x)=\lim_{x\to 9^-} f(x)=3$.

Β3.α) Είναι $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)}\overset{u=f(x)<0}{\underset{u\to 0^-}{=}}\lim_{u\to 0^-}\frac{1}{u}=-\infty$, $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{f(x)}\overset{u=f(x)>0}{\underset{u\to 0^+}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u}=+\infty$.

Επειδή $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)}\neq\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{f(x)}$, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 2}\frac{1}{f(x)}$.

β) Επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in(5,6)\cup(6,7)$, είναι: $\lim_{x\to 6}\frac{1}{f(x)}\overset{u=f(x)}{\underset{u\to 0^+}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u}=+\infty$

γ) Θέτουμε $f(x)=u$, $\lim_{x\to 8} f(x)=5$. $\lim_{x\to 8} f(f(x))=\lim_{u\to 5} f(u)=3$

Β4. Επειδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 3} f(x)$, η f δεν είναι συνεχής στο 3.

Επειδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 7} f(x)$, η f δεν είναι συνεχής στο 7.

Β5. Τα σημεία με τετμημένες 4, 6 και 8 δεν είναι γωνιακά και η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη, άρα $f'(4)=f'(6)=f'(8)=0$