Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020

11ο Διαγώνισμα

23 - 5 - 2020

Θέμα Α

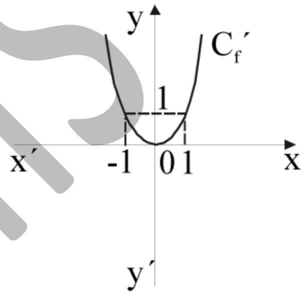
Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x,\ \alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$f'(x)=\alpha^x \ln\alpha$, δηλαδή $\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x \ln\alpha$.

μονάδες 4

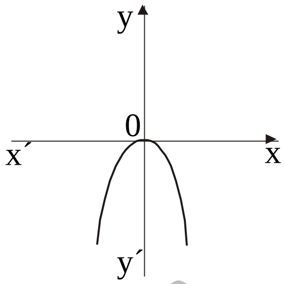
Α2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

μονάδες 4

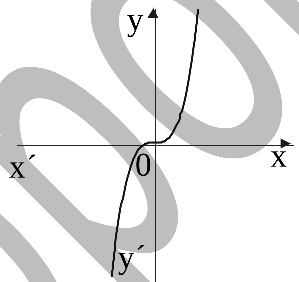


Α3. Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι

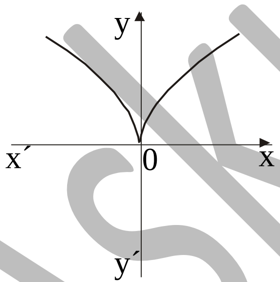
Α.



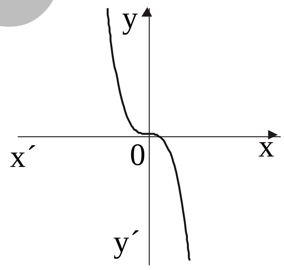
Β.



Γ.



Δ.



μονάδες 3

Α4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας συνάρτησης f.

Τότε **λάθος** είναι ο ισχυρισμός:

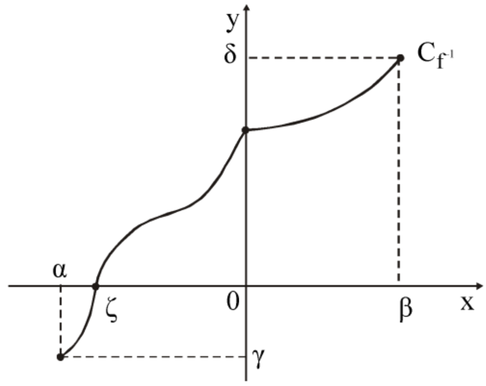
Α. πεδίο ορισμού της f είναι το [γ, δ]

Β. σύνολο τιμών της f είναι το [α, β]

Γ. $f^{-1}(\zeta)=0$

Δ. $f(0)=\zeta$

Ε. Η f έχει ελάχιστο το α για x = 0



μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή

Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ με $f(x)<0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ.

β) Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

γ) Αν $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)=\beta$, $\lim\limits_{x \to \beta} g(x)=\gamma$ και $f(x)\neq\beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x \to \alpha} g(f(x))=\gamma$.

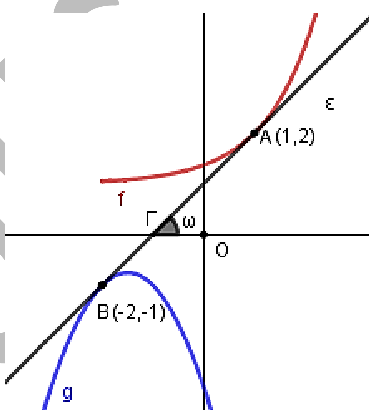
δ) Αν η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε πάντοτε ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$.

ε) Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

μονάδες 10

Θέμα Β

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων f, g και η ευθεία ε που εφάπτεται στις C_f, C_g.



Β1. Να βρείτε την εξίσωση της ε και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f'(1)=g'(-2)$, $A\hat{\Gamma}O=45°$.

μονάδες 6

Β2. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2g(x)+4}{x+2}=8$

μονάδες 4

Β3. Να δείξετε ότι

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)g(h-2)+f(1+h)-2g(h-2)-2}{h^2}=1$$

μονάδες 5

Β4. Έστω $f(x)=e^{x-1}+1$ και $g(x)=-x^2-3x-3$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x>-1$.

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του ακέραιου $c>15$ που πρέπει να προστεθεί στην g, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f, g να τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο στο διάστημα $(1,2)$.

μονάδες 5+5

Θέμα Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν :

- $A_f=[2,8]$
- $A_g=[1,5]$
- $g(3)=2$

Γ1. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\alpha(x)=f(x)+g(x)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες στο $[2,5]$ να δείξετε ότι η συνάρτηση α είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,5]$.

μονάδες 1+4

Γ2. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $g^2(x)=f^2(x)+4, x\in[3,5]$, να δείξετε ότι :

α) η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$.

β) η συνάρτηση $\beta(x)=\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(3,5]$.

μονάδες 3+4

Γ3. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $(3,4)$ και η συνάρτηση

$\gamma(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ έχει πεδίο ορισμού το $A_\gamma=(2,3)\cup(3,4)\cup(4,5]$.

Να δείξετε ότι :

α) $f(2)=f(3)=f(4)=0$.

β) η f' έχει οριζόντια εφαπτομένη

γ) η εξίσωση $\dfrac{f(x)+1}{x-4}+\dfrac{g(x)}{x-3}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(3,4)$.

μονάδες 4+5+4

Θέμα Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη και άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to(0,+\infty)$ με $f(1)=2$ για την οποία ισχύει ότι

$xf'(x)-2f(x)=-\dfrac{4}{x^2}$ για κάθε $x\neq 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2},x\neq 0$.

μονάδες 6

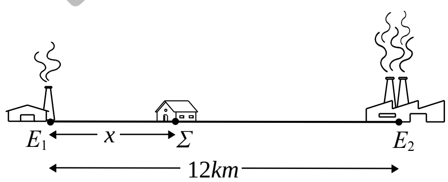
Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\eta\mu^4 x+1\right)-\sigma\upsilon\nu^2 x+1=f\left(x^4+1\right)+x^2$ είναι αδύνατη για κάθε $x\in[1,+\infty)$.

μονάδες 7

Δ4. Ένα εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12 km. Το εργοστάσιο E_1 εκπέμπει καπνό παροχής P και το E_2 παροχής 8P. Η πυκνότητα του καπνού σε μία απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης d εις την δύναμη $\lambda>1$.



α) Να δείξετε ότι η πυκνότητα του καπνού στην θέση Σ του διπλανού σχήματος δίνεται από την

συνάρτηση $\rho(x)=kP\left(\dfrac{1}{x^\lambda}+\dfrac{8}{(12-x)^\lambda}\right)$, $x\in(0,12)$, με k μία σταθερά διάφορη του μηδενός.

β) Αν τη λιγότερη δυνατή ρύπανση την έχουμε όταν το σπίτι θα απέχει απόσταση 4 km από το εργοστάσιο E_1 τότε να δείξετε ότι $\rho(x)=kP\left(f(x)+8f(12-x)-x^2-8(12-x)^2\right),x\in(0,12)$.

μονάδες 3+5

Καλή τύχη!