ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017

Β΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 8 Απριλίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$ και με άθροισμα και γινόμενο ριζών $S=x_1+x_2$ και $P=x_1\cdot x_2$ αντίστοιχα, μετασχηματίζεται στην μορφή $x^2-Sx+P=0$.

Μονάδες 15

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $-|x|\leq x\leq |x|$.

γ) Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$.

δ) Αν α>0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε $\alpha^{\mu/\nu}=\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$.

ε) Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f μπορεί να τέμνει τον άξονα y'y σε περισσότερα από ένα σημεία.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνονται οι αριθμοί

$$\alpha=\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} \text{ και } \beta=\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Να αποδείξετε ότι α=3 και β=2.

Μονάδες 15

Β2. Αν α=3 και β=2 να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2-\alpha|x|-2\beta=0,\ x\in\mathbb{R},$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x^2-(\lambda-2)x+2-\lambda=0,\ \lambda\in\mathbb{R}^*,\ (1)$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=5\lambda^2-12\lambda+4$.

Μονάδες 5

Γ2. **α)** Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες;

Μονάδες 7

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) να βρεθεί η τιμή του λ ώστε να ισχύει:

$$x_1\cdot x_2-3(x_1+x_2)=0$$

Μονάδες 7

Γ3. Αν $y_1=5$ και $y_2=1$ οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2-\big||\kappa|+2\big|x+d(\mu,4)=0$$

να βρεθούν τα $\kappa,\mu\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω σημείο $M(x^2+x-6,x^2+3x+2)$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθούν τα $x\in\mathbb{R}$ ώστε το Μ να βρίσκεται στο 2^o τεταρτημόριο.

Μονάδες 8

Δ2. Αν A_1 το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $x^2+x-6<0$ τότε:

α) αν $x\in A_1$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης 3–x.

Μονάδες 3

β) αν $x\in A_1$ να λύσετε την ανίσωση $-1<\sqrt{x^2-6x+9}\le 2$

Μονάδες 7

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x+\alpha}{\sqrt{9-x^2}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 3

β) Να βρείτε το α, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A\left(2,\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

Μονάδες 4

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 8 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σελ. 90.
Α2. **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\alpha=\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$

$\alpha=\left|4-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-1\right|$

$\alpha=4-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1$

$\boxed{\alpha=3}$

Γιατί $4>\sqrt{2}\Leftrightarrow 4-\sqrt{2}>0$ και $\sqrt{2}>1\Leftrightarrow\sqrt{2}-1>0$

$\beta=\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\beta=\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}$

$\beta=\sqrt{2\left(2^2-\sqrt{2}^2\right)}$

$\beta=\sqrt{2(4-2)}$

$\beta=\sqrt{4}$

$\boxed{\beta=2}$

Β2. $x^2-3|x|-4=0$

$\Leftrightarrow |x|^2-3|x|-4=0$

Θέτω $|x|=y\geq 0$ άρα:

$y^2-3y-4=0$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)$

$\Delta=9+16$

$\Delta=25>0$

$$y_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{3\pm5}{2}\Rightarrow\begin{cases}y_1=4\\ y_2=-1 \text{ απορρίπτεται γιατί } y\geq0\end{cases}$$

Οπότε:

$|x|=4\Leftrightarrow \boxed{x_1=4}$ ή $\boxed{x_2=-4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

$\Delta=\left[-(\lambda-2)\right]^2-4\lambda(2-\lambda)$

$\Delta=\lambda^2-4\lambda+4-8\lambda+4\lambda^2$

$\boxed{\Delta=5\lambda^2-12\lambda+4}$

Γ2. **α)** Η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες όταν:

$\Delta\geq0$ και $\lambda\neq0$

$5\lambda^2-12\lambda+4\geq0$ και $\lambda\neq0$

Συνεπώς:

$\Delta_\lambda=\beta^2-4\alpha\gamma$

$\Delta_\lambda=(-12)^2-4\cdot5\cdot4$

$\Delta_\lambda=144-80$

$\Delta_\lambda=64>0$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{64}}{2\cdot5}=\frac{12\pm8}{10}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{\lambda_1=2}\\ \boxed{\lambda_2=\frac{2}{5}}\end{cases}$$

λ	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		2		$+\infty$
		+	0	−	0	+	

Οπότε, $\lambda\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{2}{5}\right]\cup[2,+\infty)$

β) $x_1 \cdot x_2 - 3(x_1 + x_2) = 0$

$\Leftrightarrow P - 3 \cdot S = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha} - 3\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - \lambda - 3(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - \lambda - 3\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4\lambda = -8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}$

Γ3. $y_1 + y_2 = 6$ και $y_1 \cdot y_2 = 5$. Άρα:

$$||\kappa| + 2| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} |\kappa| + 2 = 6 \Leftrightarrow |\kappa| = 4 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 4} \text{ ή } \boxed{\kappa = -4} \\ \text{ή} \\ |\kappa| + 2 = -6 \Leftrightarrow |\kappa| = -8 \text{ Αδύνατη} \end{cases}$$

$$d(\mu, 4) = 5 \Leftrightarrow |\mu - 4| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu - 4 = 5 \Leftrightarrow \boxed{\mu = 9} \\ \text{ή} \\ \mu - 4 = -5 \Leftrightarrow \boxed{\mu = -1} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Άρα $x^2 + x - 6 < 0$ και $x^2 + 3x + 2 > 0$.

- $x^2 + x - 6 < 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = +2 \end{cases}$$

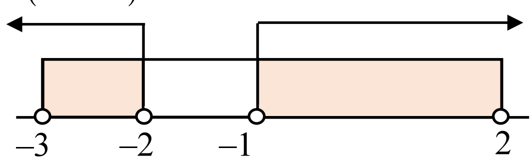
Άρα $x \in (-3, 2)$.

- $x^2 + 3x + 2 > 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Άρα $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.



Άρα, οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι $x \in (-3, -2) \cup (-1, 2)$.

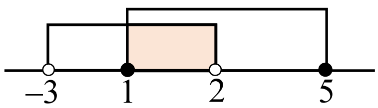
Δ2. **α)** $x\in(-3,2)\Leftrightarrow -3<x<2\Leftrightarrow 3>-x>-2\Leftrightarrow 3+3>3-x>3-2\Leftrightarrow 6>3-x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{1<3-x<6}$

β) $-1<\sqrt{x^2-6x+9}\le 2$

$\Leftrightarrow -1<\sqrt{x^2-6x+9}$ και $\sqrt{x^2-6x+9}\le 2$

- $-1<\sqrt{x^2-6x+9}$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\sqrt{x^2-6x+9}\le 2\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2}\le 2\Leftrightarrow |x-3|\le 2\Leftrightarrow -2\le x-3\le 2\Leftrightarrow \boxed{1\le x\le 5}$



$x\in[1,2)$

Δ3. **α)** Πρέπει και αρκεί: $9-x^2>0\Leftrightarrow |x|<3\Leftrightarrow -3<x<3$. Άρα $A_f=(-3,3)$

β) $f(2)=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow\dfrac{2+\alpha}{\sqrt{9-2^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow 5(2+\alpha)=4\sqrt{5}\sqrt{5}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10+5\alpha=4\cdot 5\Leftrightarrow 5\alpha=20-10\Leftrightarrow\boxed{\alpha=2}$