Θέματα τύπου
Γραπτών προαγωγικών εξετάσεων περιόδου
Μαΐου - Ιουνίου

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

Α. Θεωρία

1. Έστω σημείο Μ(x,y) σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy, διαφορετικό από την αρχή Ο των αξόνων. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\hat{\omega}=x\hat{O}M$;

2. Κατασκευάζοντας κατάλληλο σχήμα, να υπολογίστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $0°$.

3. Ποιες σχέσεις συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών;

Β. Θεωρία

1. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

2. Να γράψετε το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^3$ και στη συνέχεια να το αποδείξετε.

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) $(x-y)^2=x^2-2x(-y)+(-y)^2$

β) $(-\alpha+\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

γ) $(5\omega+4)^2=25\omega^2+16$

δ) $(3x-y)^2=3x^2-2\cdot 3x\cdot y+y^2$

1η Άσκηση

Δίνεται η εξίσωση $x(5x-13)=-6$ και μια οξεία γωνία $\hat{\omega}$. Αν γνωρίζουμε ότι το ημω είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε:

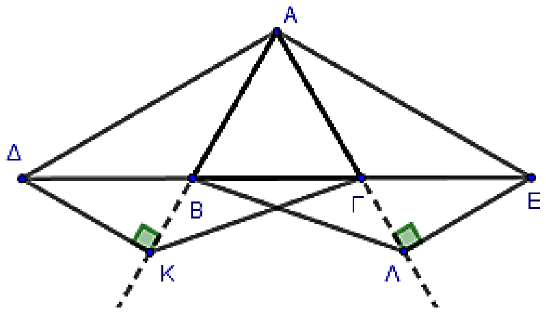
α) Να λύσετε την εξίσωση.

β) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega=\dfrac{3}{5}$.

γ) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

2η Άσκηση

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$. Στις προεκτάσεις της ΒΓ προς τα Β και Γ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα τέτοια, ώστε $B\Delta=AB$ και $\Gamma E=A\Gamma$. Έστω Κ και Λ οι προβολές των Δ και Ε στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.



α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Να δείξετε ότι τα Δ, Ε ισαπέχουν από τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

γ) Να δείξετε ότι $B\Lambda=\Gamma K$.

3η Άσκηση

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\dfrac{y(y-3)+y^2-9}{2y+3}$ και $B=\dfrac{x^3-2x^2+x}{x-1}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις A και B.

β) Κάνοντας απλοποιήσεις, να δείξετε ότι $A=y-3$ και $B=x^2-x$.

γ) Να βρείτε τις τιμές των x, y για τις οποίες $B+A=x^2$ και $B+3A=x^2-4$.

Από τις δύο θεωρίες να απαντήσετε σε μία και από τις τρείς ασκήσεις να απαντήσετε σε δύο.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

Α. Θεωρία

1. Έστω ρ η απόσταση του Μ από την αρχή Ο των αξόνων. Είναι $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

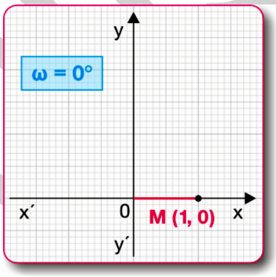
$$\eta\mu\omega=\frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}=\frac{y}{\rho},\qquad \sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}=\frac{x}{\rho}$$

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}}=\frac{y}{x}$$

2. Θεωρούμε το σημείο Μ(1, 0) του ημιάξονα Οx, είναι $x\hat{O}M=0^{o}$ και $\rho=OM=\sqrt{1^2+0^2}=1$.

Οπότε $\eta\mu 0^{o}=\frac{y}{\rho}=\frac{0}{1}=0$, $\sigma\upsilon\nu 0^{o}=\frac{x}{\rho}=\frac{1}{1}=1$,

$\varepsilon\varphi 0^{o}=\frac{y}{x}=\frac{0}{1}=0$.



3. Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\eta\mu(180^{\circ}-\omega)=\eta\mu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(180^{\circ}-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega \qquad \varepsilon\varphi(180^{\circ}-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$

Β. Θεωρία

1. Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

2. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Απόδειξη: $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=$

$\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

3. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ

1η Άσκηση

α) $x(5x-13)=-6 \Leftrightarrow 5x^2-13x+6=0$.

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με $\alpha=5, \beta=-10, \gamma=21$.

Έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\beta\gamma=(-13)^2-4\cdot5\cdot6=169-120=49$ και ρίζες

$$x_1=\frac{-(-13)+\sqrt{49}}{2\cdot5}=\frac{13+7}{10}=\frac{20}{10}=2 \text{ και } x_2=\frac{-(-13)-\sqrt{49}}{2\cdot5}=\frac{13-7}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

β) Επειδή η μία ρίζα της εξίσωσης είναι το ημω και η γωνία ω είναι οξεία, ισχύει ότι $0 < ημω < 1$. Επομένως $ημω = \dfrac{3}{5}$.

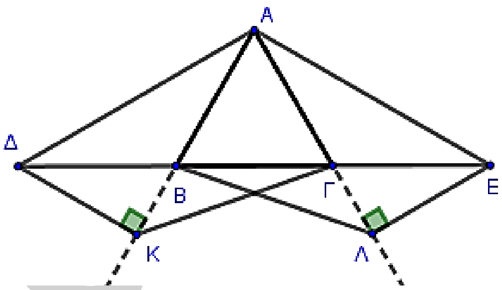
γ) Στη ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ αντικαθιστούμε $ημω = \dfrac{3}{5}$ και έχουμε: $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + συν^2ω = 1$ ή

$\dfrac{9}{25} + συν^2ω = 1$ ή $συν^2ω = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$ άρα $συνω = \pm\dfrac{4}{5}$.

Όμως, αφού η γωνία ω είναι οξεία , ισχύει ότι $συνω > 0$ άρα $συνω = \dfrac{4}{5}$.

Επίσης, $εφω = \dfrac{ημω}{συνω} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$.

2η Άσκηση



α) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΓΕ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$,
- $ΒΔ = ΓΕ$ και
- $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Γ}Ε$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β,Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Λόγω του κριτηρίου ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΔ = ΑΕ$, επομένως το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Αρκεί $ΔΚ = ΓΛ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΚ και ΓΕΛ έχουν:

- $ΒΔ = ΓΕ$ και
- $Δ\hat{Β}Κ = Ε\hat{Γ}Λ$ ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΔΒΚ και ΓΕΛ είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΔΚ = ΓΛ$.

γ) Τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΒΓΛ έχουν:

- τη πλευρά ΒΓ κοινή
- $Κ\hat{Β}Γ = Λ\hat{Γ}Β$ παραπληρωματικές των ίσων γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- $ΒΚ = ΓΛ$ επειδή $\overset{\triangle}{ΔΒΚ} = \overset{\triangle}{ΓΕΛ}$.

Λόγω του κριτηρίου ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΒΛ = ΓΚ$

3η Άσκηση

α) Για να ορίζεται η παράσταση Α πρέπει $2y + 3 \neq 0$ ή $2y \neq -3$ ή $y \neq -\dfrac{3}{2}$

Για να ορίζεται η παράσταση Β πρέπει $x - 1 \neq 0$ ή $x \neq 1$

β) $$Α = \frac{y(y-3) + y^2 - 9}{2y+3} = \frac{y(y-3) + (y-3)(y+3)}{2y+3} = \frac{(y-3)(y+y+3)}{2y+3} = \frac{(y-3)\cancel{(2y+3)}}{\cancel{2y+3}} = y - 3$$

$$Β = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x-1} = \frac{x\left(x^2 - 2x + 1\right)}{x-1} = \frac{x(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-1}} = x^2 - x$$

γ) $B+A=x^2$ ή $\cancel{x^2}-x+y-3=\cancel{x^2}$ ή $y=x+3\ (1)$ και

$B+3A=x^2-4$ ή $\cancel{x^2}-x+3(y-3)=\cancel{x^2}-4$ ή $-x+3y-9=-4$ ή $-x+3y=5\ (2)$

Από το σύστημα των (1),(2) έχουμε: $\begin{cases} y=x+3 \\ -x+3y=5 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=x+3 \\ -x+3(x+3)=5 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=x+3 \\ -x+3x+9=5 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} y=x+3 \\ 2x=5-9 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=x+3 \\ 2x=-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=-2+3=1 \\ x=-2 \end{cases}$