1ο ΓΕΛ ΑΛΕΞ / ΠΟΛΗΣ 21 / 1 / 2020

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
(ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΟΡΙΑ — ΣΥΝΕΧΕΙΑ—ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ (ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ))

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ....

ΘΕΜΑ Α :

Α 1 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi)=\chi^{\alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,+\infty)$ και ισχύει : $f'(\chi)=\alpha\cdot\chi^{\alpha-1}$. **(10 Μονάδες)**

Α2 . Να διατυπώσετε τον κανόνα της αλυσίδας . **(5 Μονάδες)**

Α3 . Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A . Να δώσετε τον ορισμό της πρώτης παραγώγου f' της συνάρτησης f . **(5 Μονάδες)**

Α4 . Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό :
« Η εφαπτομένη μιας καμπύλης που παριστάνει στο επίπεδο μία συνάρτηση f έχει με τη C_f ένα μόνο (διπλό) κοινό σημείο .»
Να εξετάσετε αν ο παρακάτω ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας . **(10 Μονάδες)**

Α5 . Δίνεται ο παρακάτω συλλογισμός :
« Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in A$, τότε ισχύει :
$f'(\chi_o)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}=\ell\in\mathbb{R}$ και εάν θέσουμε όπου $h\to -h$, τότε έχουμε
$f'(\chi_o)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0-h)-f(\chi_0)}{-h}=\ell\in\mathbb{R}$, οπότε , ισοδύναμα , διαπιστώνουμε ότι το
όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0-h)}{h}$ υπάρχει , είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}-\frac{f(\chi_0-h)-f(\chi_0)}{h}\right]=$$
$$=\ell-(-\ell)=2\cdot\ell=2\cdot f'(\chi_0)\ .$$

Να εντοπίσετε και να εξηγήσετε το λάθος στην απόδειξη του παραπάνω συλλογισμού , χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα . **(10 Μονάδες)**

Α6 . Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές **(Σ)** ή λανθασμένες **(Λ)** .

(i) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in A_f$, τότε ισχύει : $\left[f(\chi_0)\right]' = f'(\chi_0)$.

(ii) Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $\chi_0 \in A_f \cap A_g$, τότε και η συνάρτηση $f+g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in A_f \cap A_g$.

(iii) Αν $S(t)$ είναι η τετμημένη ενός κινητού ως προς το χρόνο , τότε το όριο : $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του $S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 .

(iv) Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $\chi_0 \in A_f$, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in A_f$.

(v) Αν για τη συνάρτηση f , $A(\chi_0, f(\chi_0)) \in C_f$ και υπάρχει το όριο : $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0} = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία (ε) που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ . **(10 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(\chi) = \begin{cases} \chi^{2\mu} \cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right) & , \ \alpha\nu \ \chi \neq 0 \\ 0 & , \ \alpha\nu \ \chi = 0 \end{cases}$, όπου $\mu \in \mathbb{R} : \mu > \dfrac{1}{2}$.

Β1 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$ και να βρείτε την τιμή του $f'(0)$. **(8 Μονάδες)**

Έστω $\mu = 2$.

Β2 . Να ορίσετε τη συνάρτηση f' (4 Μονάδες) και να εξετάσετε αν η f' είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της . (6 Μονάδες) **(10 Μονάδες)**

Β3 . Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία της $A\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} , f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\right)$, $B\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} , f\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\right)$ σχηματίζουν με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνίες παραπληρωματικές (3 Μονάδες) και , στη συνέχεια , να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f\left(h-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)+f\left(h+\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)}{h}$. (4 Μονάδες)

(7 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ :

Θεωρούμε μια περιττή και πολυωνυμική συνάρτηση f $\nu-$βαθμού , όπου $\nu \in \mathbb{N} : \nu \geq 2$, για την οποία ισχύει : $\ell\text{im}_{h \to 0} \dfrac{\left[f'\left(\chi+\frac{h}{2}\right)\right]^2 - \left[f'\left(\chi+\frac{h}{3}\right)\right]^2}{\ell n(1+h)} = 6 \cdot f(\chi) - 4 \cdot \chi$ (1), για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Γ1 . Να αποδείξετε ότι : $\ell\text{im}_{h \to 0} \dfrac{\left[f'\left(\chi+\frac{h}{2}\right)\right]^2 - \left[f'\left(\chi+\frac{h}{3}\right)\right]^2}{\ell n(1+h)} = \dfrac{f''(\chi) \cdot f'(\chi)}{3}$ (2) , για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$,

δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας . **(7 Μονάδες)**

Γ2 . Να αποδείξετε ότι : $f(\chi) = \chi^3 + \chi$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$. **(7 Μονάδες)**

Γ3 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (2 Μονάδες) και , θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} στο σημείο της $K\left(2 , f^{-1}(2)\right)$.

(3 Μονάδες) **(5 Μονάδες)**

Γ4 . Ένα κινητό M κινείται πάνω στην καμπύλη της C_f και στο εσωτερικό της γωνίας $\chi O \psi$ έτσι ώστε σε κάθε χρονική στιγμή t (όπου t είναι ο χρόνος σε sec) η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $1 \ {}^{cm}\!/_{sec}$. Υπάρχει μία χρονική στιγμή t_0 στην οποία το κινητό βρίσκεται στη θέση A της C_f και στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι τετραπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του . Για τη χρονική αυτή στιγμή t_0 , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A με τον άξονα $\chi'\chi$.

(6 Μονάδες)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΟΡΙΑ — ΣΥΝΕΧΕΙΑ—ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ (ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ))

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α :

Α 1 . Πράγματι , αν $\psi = \chi^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \ell n\chi}$ και θέσουμε $u = \alpha \cdot \ell n\chi$, τότε παίρνουμε $\psi = e^{u}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,+\infty)$ με $\psi' = \left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \cdot \ell n\chi} \cdot \dfrac{\alpha}{\chi} = \chi^{\alpha} \cdot \dfrac{\alpha}{\chi} = \alpha \cdot \chi^{\alpha-1}$.

Α2 . Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει : $\left(f(g(\chi))\right)' = f'(g(\chi)) \cdot g'(\chi)$. Δηλαδή αν $u = g(\chi)$, τότε παίρνουμε $\left(f(u)\right)' = f'(u) \cdot u'$. Με το συμβολισμό του Leibniz , αν $\psi = f(u)$ και $u = g(\chi)$, έχουμε τον τύπο : $\dfrac{d\psi}{d\chi} = \dfrac{d\psi}{du} \cdot \dfrac{du}{d\chi}$ (όπου το σύμβολο $\dfrac{d\psi}{d\chi}$ δεν παριστάνει κάποιο πηλίκο) , που είναι γνωστός ως κανόνας της αλυσίδας .

Α3 . Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη . Αντιστοιχίζοντας κάθε $\chi \in A$ στο $f'(\chi)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f' : A_1 \to \mathbb{R}$ με $\chi \to f'(\chi)$ η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f , ή απλά , παράγωγος της f .

Α4 . Ο ισχυρισμός είναι ψευδής , διότι , αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \begin{cases} \chi^2 & , \text{ αν } \chi \le 0 \\ 0 & , \text{ αν } \chi > 0 \end{cases}$, τότε η εφαπτομένη της C_f στο $\chi_0 = 0$ είναι η ευθεία

$\psi - f(0) = f'(0) \cdot (\chi - 0) \underset{f'(0)=0}{\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}} \psi = 0$, η οποία έχει άπειρα κοινά σημεία με τη C_f, καθώς συμπίπτει με ένα τμήμα της C_f .

(Ένα **δεύτερο αντιπαράδειγμα** είναι η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \chi^3$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1\ ,1)$ είναι η ευθεία : $\psi - f(1) = f'(1) \cdot (\chi - 1) \underset{f'(1)=3}{\overset{f(1)=1}{\Rightarrow}} \psi = 3 \cdot \chi - 2$, οπότε η εξίσωση $f(\chi) = \psi \Rightarrow \chi^3 = 3 \cdot \chi - 2$, έχει δύο λύσεις : $\chi = 1$, $\chi = -2$, άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1\ ,1)$ τέμνει τη C_f και σε ένα δεύτερο σημείο το $B(-2\ ,-8)$.)

Α5 . Το λάθος στην απόδειξη του παραπάνω συλλογισμού , βρίσκεται στη λέξη **ισοδύναμα** , διότι αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0-h)}{h}$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα όρια $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0-h)-f(\chi_0)}{h}$ υπάρχουν . Για παράδειγμα , αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(\chi)=|\chi|$, τότε στο $\chi_0=0$, ισχύει

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|-|-h|}{h}=0$, άρα υπάρχει , αλλά τα όρια $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$,

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0-h)-f(\chi_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0-h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|-h|}{h}$ δεν υπάρχουν .

Α6 . Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές **(Σ)** ή λανθασμένες **(Λ)** .

(i) Λάθος (για παράδειγμα αν $f(\chi)=\chi^2$ και $\chi_0=1$, τότε : $f(1)=1^2=1\Rightarrow (f(1))'=0$, ενώ $f'(\chi)=2\cdot\chi\Rightarrow f'(1)=2\cdot 1=2$.)

(ii) Λάθος (για παράδειγμα οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(\chi)=|\chi|$, $g(\chi)=-|\chi|$ και $A_f=A_g=\mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο $\chi_0=0$ (βιβλίο σελίδα 99) , αλλά η συνάρτηση $f+g$ με τύπο $(f+g)(\chi)=0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$, ως σταθερή συνάρτηση .)

(iii) Σωστό (βιβλίο σελίδα 123)

(iv) Σωστό (σχόλιο βιβλίου σελίδα 100)

(v) Σωστό (ορισμός βιβλίου σελίδα 94)

ΘΕΜΑ Β :

Β1 . Έχουμε $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0}\left[\chi^{2\cdot\mu-1}\cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right)\right]=0$, διότι :

$\left|\chi^{2\cdot\mu-1}\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right)\right|\le\left|\chi^{2\cdot\mu-1}\right|\cdot 1\Rightarrow -\left|\chi^{2\cdot\mu-1}\right|\le\chi^{2\cdot\mu-1}\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right)\le\left|\chi^{2\cdot\mu-1}\right|$ και επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0}\left|\chi^{2\cdot\mu-1}\right|=0$,

Από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}=0\Rightarrow f'(0)=0$.

B2 . Για $\mu = 2$ η συνάρτηση f γίνεται : $f(\chi)=\begin{cases} \chi^4 \cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right) & , \text{ αν } \chi \neq 0 \\ 0 & , \text{ αν } \chi = 0 \end{cases}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, ως γινόμενο και σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων χ^4 , $\eta\mu\chi$ και $\dfrac{1}{\chi^2}$ με

$$f'(\chi)=\left(\chi^4\right)' \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{\chi^2}\right)+\chi^4 \cdot \left(\eta\mu\left(\frac{1}{\chi^2}\right)\right)' = 4\cdot\chi^3\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{\chi^2}\right)+\chi^4\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\chi^2}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{\chi^2}\right)' =$$

$$= 4\cdot\chi^3\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{\chi^2}\right)+\chi^4\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\chi^2}\right)\right)\cdot\left(\frac{-2}{\chi^3}\right) = 4\cdot\chi^3\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{\chi^2}\right)-2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\chi^2}\right) , \chi \neq 0$$

και $f'(0)=0$ (από το **B1** ερώτημα) , άρα ο τύπος της συνάρτησης f' είναι

$$f'(\chi)=\begin{cases} 4\cdot\chi^3\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right)-2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right) & , \chi \neq 0 \\ 0 & , \chi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως γινόμενο , άθροισμα και σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $4\chi^3, -2\chi$, $\eta\mu\chi$, $\sigma\upsilon\nu\chi$ και $\dfrac{1}{\chi^2}$.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της f' στο $\chi_0 = 0$. Έχουμε :

$\lim\limits_{\chi\to 0} f'(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 0}\left(4\cdot\chi^3\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right)-2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right)\right)=0$, διότι

$\left|4\cdot\chi^3\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right)-2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right)\right| \leq \left|4\cdot\chi^3\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right)\right|+\left|2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right)\right| \leq \left|4\cdot\chi^3\right|\cdot 1+\left|2\chi\right|\cdot 1$, οπότε

παίρνουμε : $-\left(4\left|\chi^3\right|+2\cdot|\chi|\right) \leq 4\cdot\chi^3\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right)-2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{\chi^2}\right) \leq 4\left|\chi^3\right|+2\cdot|\chi|$ και επειδή

$\lim\limits_{\chi\to 0}\left(4\left|\chi^3\right|+2\cdot|\chi|\right)=0$, τότε , από το κριτήριο παρεμβολής , ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 0} f'(\chi)=f'(0)=0$,

άρα η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $A_{f'}=\mathbb{R}$.

B3 . Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} , f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\right)$,

οπότε θα ισχύει : $\varepsilon\varphi\omega = f'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \overset{(1)}{=} 4\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^3\cdot\eta\mu\pi-2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\pi=-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $B\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} , f\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\right)$,

οπότε θα ισχύει : $\varepsilon\varphi\theta = f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \overset{(1)}{=} 4\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^3\cdot\eta\mu\pi-2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\pi=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$. Τελικά ισχύει :

$$f'\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)+f'\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)=0 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega+\varepsilon\varphi\theta=0 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega=-\varepsilon\varphi\theta \overset{0^0\leq\omega,\,\theta<180^0}{\Rightarrow} \omega+\theta=180^0 .$$

Ισχύει :

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)=0$$, οπότε :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(h-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)+f\left(h+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left(h-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)-f\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)}{h}+\frac{f\left(h+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)}{h}\right]=$$

$$=f'\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)+f'\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)=0$$

ΘΕΜΑ Γ :

Γ1 . Έχουμε :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[f'\left(\chi+\frac{h}{2}\right)\right]^2-\left[f'\left(\chi+\frac{h}{3}\right)\right]^2}{\ell n(1+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[f'\left(\chi+\frac{h}{2}\right)-f'\left(\chi+\frac{h}{3}\right)\right]}{h}\cdot\left[f'\left(\chi+\frac{h}{2}\right)+f'\left(\chi+\frac{h}{3}\right)\right]\cdot\frac{1}{\frac{\ell n(1+h)-\ell n1}{h}}=\ell$$

- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ell n(1+h)-\ell n1}{h}=g'(1)=1$, για τη συνάρτηση g με $g(\chi)=\ell n\chi$, $\chi>0$ στο $\chi_0=1$.
- $\lim\limits_{h\to 0}\left[f'\left(\chi+\frac{h}{2}\right)+f'\left(\chi+\frac{h}{3}\right)\right]=f'(\chi)+f'(\chi)=2\cdot f'(\chi)$, διότι η συνάρτηση f είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη στο $A_f=\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική $\nu-$ βαθμού , οπότε η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις $\chi+\frac{h}{2}$, $\chi+\frac{h}{3}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, οπότε οι συναρτήσεις $f'\left(\chi+\frac{h}{2}\right)$, $f'\left(\chi+\frac{h}{3}\right)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων .
- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\left[f'\left(\chi+\frac{h}{2}\right)-f'\left(\chi+\frac{h}{3}\right)\right]}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\left[f'\left(\chi+\frac{h}{2}\right)-f'(\chi)\right]}{\frac{h}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\left[f'\left(\chi+\frac{h}{3}\right)-f'(\chi)\right]}{\frac{h}{3}}\right\}=\frac{1}{2}\cdot f''(\chi)-\frac{1}{3}\cdot f''(\chi)=\frac{1}{6}\cdot f''(\chi)$

  Τελικά παίρνουμε : $\ell=2\cdot f'(\chi)\cdot\frac{1}{6}\cdot f''(\chi)\cdot 1=\frac{f'(\chi)\cdot f''(\chi)}{3}$

Γ2 . Αφού η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική $\nu-$ βαθμού θα έχει τη γενική μορφή :

$f(\chi)=\alpha_\nu\cdot\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot\chi^{\nu-1}+.....+\alpha_1\cdot\chi+\alpha_0$, όπου α_ν , $\alpha_{\nu-1}$,....., α_1 , $\alpha_0\in\mathbb{R}$, με $\alpha_\nu\neq 0$,

για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, με $f'(\chi)=\nu\cdot\alpha_\nu\cdot\chi^{\nu-1}+(\nu-1)\cdot\alpha_{\nu-1}\cdot\chi^{\nu-2}+.....+\alpha_1$, $(\nu-1)$ βαθμού και με

$f''(\chi)=\nu\cdot(\nu-1)\cdot\alpha_\nu\cdot\chi^{\nu-2}+(\nu-1)\cdot(\nu-2)\cdot\alpha_{\nu-1}\cdot\chi^{\nu-3}+.....+2\alpha_2$, $(\nu-2)$ βαθμού .

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι : $f'(\chi)\cdot f''(\chi)=18\cdot f(\chi)-12\cdot\chi$, άρα

$\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\left(f'(\chi)\cdot f''(\chi)\right)=\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\left(18\cdot f(\chi)-12\cdot\chi\right)\Rightarrow \beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\, f'(\chi)+\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\, f''(\chi)=\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\, f(\chi)$,

οπότε τελικά παίρνουμε : $(\nu-2)+(\nu-1)=\nu\Rightarrow\nu=3$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι

πολυωνυμική 3ου βαθμού με γενικό τύπο : $f(\chi)=\alpha\cdot\chi^3+\beta\cdot\chi^2+\gamma\cdot\chi+\delta$, όπου $\alpha\neq 0$.

Η συνάρτηση f είναι περιττή , δηλαδή για κάθε $\chi\in\mathbb{R}\Rightarrow-\chi\in\mathbb{R}$ και ισχύει :

$f(-\chi)=-f(-\chi)\overset{\chi=0}{\Rightarrow}f(0)=-f(0)\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow\delta=0$. Άρα $f(\chi)=\alpha\cdot\chi^3+\beta\cdot\chi^2+\gamma\cdot\chi$

και , επιπλέον , για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, ισχύει :

$f(\chi)=-f(-\chi)\Rightarrow\alpha\cdot\chi^3+\beta\cdot\chi^2+\gamma\cdot\chi=-\left(-\alpha\cdot\chi^3+\beta\cdot\chi^2-\gamma\cdot\chi\right)\Rightarrow 2\beta\cdot\chi^2=0\Rightarrow\beta=0$.

Άρα $f(\chi)=\alpha\cdot\chi^3+\gamma\cdot\chi$, $f'(\chi)=3\alpha\cdot\chi^2+\gamma$, $f''(\chi)=6\alpha\cdot\chi$, οπότε από την ισότητα

$f'(\chi)\cdot f''(\chi)=18\cdot f(\chi)-12\cdot\chi$ προκύπτει ότι :

$6\alpha\chi\cdot\left(3\alpha\cdot\chi^2+\gamma\right)=18\left(\alpha\cdot\chi^3+\gamma\cdot\chi\right)-12\cdot\chi\Rightarrow 18\alpha^2\cdot\chi^3+6\alpha\gamma\cdot\chi=18\,\alpha\cdot\chi^3+(18\gamma-12)\cdot\chi$.

Από την παραπάνω ισότητα πολυωνύμων προκύπτουν :

$$\left.\begin{cases}18\alpha^2=18\,\alpha\overset{\alpha\neq0}{\Rightarrow}\alpha=1\\ 6\alpha\cdot\gamma=18\gamma-12\overset{\alpha=1}{\Rightarrow}\gamma=1\end{cases}\right\}\Rightarrow f(\chi)=\chi^3+\chi .$$

Γ3 . Για κάθε χ_1 , $\chi_2\in\mathbb{R}$ με $\chi_1<\chi_2$ ισχύει : $\chi_1^{\,3}<\chi_2^{\,3}$, άρα $\chi_1^{\,3}+\chi_1<\chi_2^{\,3}+\chi_2\Rightarrow f(\chi_1)<f(\chi_2)$

, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται . Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} στο σημείο της $K\left(2\,,f^{-1}(2)\right)$

είναι η : $\psi-f^{-1}(2)=\left(f^{-1}\right)'(2)\cdot(\chi-2)$. Από τη σχέση : $\psi=f(\chi)\Leftrightarrow\chi=f^{-1}(\psi)$, όπου

$\psi\in f(\mathbb{R})\overset{f\nearrow\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=}\left(\lim\limits_{\chi\to-\infty}f(\chi),\lim\limits_{\chi\to+\infty}f(\chi)\right)=(-\infty\,,+\infty)=\mathbb{R}$, για

$\psi=2\Leftrightarrow 2=f(\chi)\Leftrightarrow\chi=f^{-1}(2)$, όπου $f(\chi)=2=f(1)\overset{f\ 1-1}{\Rightarrow}\chi=1\Rightarrow f^{-1}(2)=1$.

Από τη γνωστή σχέση : $f^{-1}\left(f(\chi)\right)=\chi$ και επειδή η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, παραγωγίζοντας κατά μέλη παίρνουμε :

$\left(f^{-1}(f(\chi))\right)' = (\chi)' \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(\chi))\cdot f'(\chi) = 1 \overset{\chi=1}{\Rightarrow} \left(f^{-1}\right)'(f(1))\cdot f'(1) = 1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(2)\cdot f'(1) = 1$,

όπου $f'(\chi) = 3\chi^2 + 1 \overset{\chi=1}{\Rightarrow} f'(1) = 4$, οπότε παίρνουμε : $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{4}$ και η εξίσωση της

εφαπτομένης γίνεται : $\psi - 1 = \dfrac{1}{4}\cdot(\chi - 2) \Rightarrow \psi = \dfrac{1}{4}\cdot\chi + \dfrac{1}{2}$.

Γ4 . Θεωρούμε το κινητό $M(\chi(t)\ ,\ \psi(t))$, όπου $\chi(t) > 0$, $\psi(t) > 0$, για το οποίο ισχύει :

$\chi'(t) = 1\ {cm}/{sec}$ για κάθε $t \geq 0$, όπου $\psi(t) = \chi^3(t) + \chi(t)$. Για κάποια χρονική στιγμή t_0

ισχύει : $\psi'(t_0) = 4\cdot\chi'(t_0)$, οπότε παραγωγίζοντας κατά μέλη παίρνουμε :

$$\psi'(t) = 3\cdot\chi^2(t)\cdot\chi'(t) + \chi'(t) \overset{t=t_0}{\Rightarrow} \psi'(t_0) = 3\cdot\chi^2(t_0)\cdot\chi'(t_0) + \chi'(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\chi'(t_0) = 3\cdot\chi^2(t_0)\cdot\chi'(t_0) + \chi'(t_0) \overset{\chi'(t_0)=1}{\Rightarrow} \chi^2(t_0) = 1 \overset{\chi(t_0)>0}{\Rightarrow} \chi(t_0) = 1\ ,\ \psi(t_0) = 2\ .$$

Στη θέση A το κινητό έχει συντεταγμένες $A(1\ ,\ 2)$.

Έστω $\omega(t)$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A με τον άξονα $\chi'\chi$,

, οπότε : $\varepsilon\varphi\omega(t) = f'(\chi(t)) = 3\cdot\chi^2(t) + 1$, την οποία παραγωγίζουμε κατά μέλη κι έχουμε :

$$\left(\varepsilon\varphi\omega(t)\right)' = \left(3\cdot\chi^2(t) + 1\right)' \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t) = 6\cdot\chi(t)\cdot\chi'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t)\right)\cdot\omega'(t) = 6\cdot\chi(t)\cdot\chi'(t) \overset{t=t_0}{\Rightarrow} \left(1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t_0)\right)\cdot\omega'(t_0) = 6\cdot\chi(t_0)\cdot\chi'(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \left(\frac{\psi(t_0)}{\chi(t_0)}\right)^2\right)\cdot\omega'(t_0) = 6\cdot\chi(t_0)\cdot\chi'(t_0) \Rightarrow \left(1 + \left(\frac{2}{1}\right)^2\right)\cdot\omega'(t_0) = 6\cdot1\cdot1 \Rightarrow \omega'(t_0) = \frac{6}{5}\ {rad}/{sec}\ .$$