1ο Κεφάλαιο: Συστήματα

Γραμμικά συστήματα

- **i.** Ποια εξίσωση λέγεται γραμμική;
- **ii.** Πως μεταβάλλεται η ευθεία $\alpha x+\beta y=\gamma$, $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$ για τις διάφορες τιμές των α,β,γ;
- **iii.** Τι ονομάζεται λύση μιας γραμμικής εξίσωσης;
- **iv.** Ποιο σύστημα λέγεται γραμμικό και τι ονομάζεται λύση του;
- **v.** Πότε δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα;
- **vi.** Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων (ε) και (ε');
- **vii.** Ποιες είναι οι βασικές μέθοδοι επίλυσης ενός συστήματος;
- **viii.** Τι γνωρίζεται για το πλήθος των λύσεων ενός συστήματος;
- **ix.** Να λύσετε και διερευνήσετε το σύστημα $\begin{cases}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{cases}$.
- **x.** Στο σύστημα $\begin{cases}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{cases}$ τι ονομάζεται ορίζουσα του συστήματος και ποιες είναι οι ορίζουσες D_x και D_y;
- **xi.** Τι γνωρίζεται για τις λύσεις του συστήματος $\begin{cases}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{cases}$ με τη χρήση των οριζουσών;
- **xii.** Ποια εξίσωση ονομάζεται γραμμική εξίσωση με τρείς αγνώστους; Τι ονομάζεται λύση της;

Βασικές ασκήσεις

1. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases}\left(\sqrt{3}-1\right)x+2y=-2\\ x+\left(\sqrt{3}+1\right)y=-1-\sqrt{3}\end{cases}$ **β)** $\begin{cases}3\chi-2y-\omega=11\\ 2x-5y-2\omega=3\\ 5x+y-2\omega=33\end{cases}$ **γ)** $\begin{cases}\chi+y=8\\ y+\omega=4\\ \omega+x=-2\end{cases}$

δ) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\omega}=-1\\ \dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{x}=-2\end{cases}$ **ε)** $\begin{cases}2|x|-3|y|=2\\ |x|+2|y|=8\end{cases}$ **στ)** $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=3\\ \sqrt{x}+3\sqrt{y}=7\end{cases}$

2. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases}(\lambda-1)x-2y=1\\ 4x-(\lambda+1)y=-2\end{cases}$.

3. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ, να βρείτε τα κοινά σημεία των ευθειών: $\varepsilon_1:\alpha x+y=\alpha^2$ και $\varepsilon_2:x+\alpha y=1$.

4. Για ποια τιμή του λ, το σύστημα $\begin{cases}x-2y=-4\\ \lambda x+3y=5\end{cases}$ έχει λύση η οποία επαληθεύει την εξίσωση $x+5y=17$;

5. Ένα ξενοδοχείο έχει 26 δωμάτια, άλλα δίκλινα και άλλα τρίκλινα και συνολικά 68 κρεβάτια. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

6. Να βρεθεί κλάσμα τέτοια ώστε αν στους δύο όρους του προσθέσουμε το 2 προκύπτει ο αριθμός 2 ενώ αν από τους όρους του αφαιρέσουμε 3 προκύπτει ο αριθμός 3.

Μη γραμμικά συστήματα

Βασικές ασκήσεις

7. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ x+y=1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=10 \\ x^2-y^2+x-y=6 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2xy-y^2-5y=0 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$

8. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k, για τις οποίες η ευθεία $y=2x+k$ τέμνει την παραβολή $y=-x^2$ σε δύο σημεία.

2ο κεφάλαιο: Ιδιότητες συναρτήσεων

Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες συνάρτησης

i. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
ii. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
iii. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ;
iv. Ποια είναι η μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha\neq 0$;
v. Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0\in A$; Πως ονομάζεται το x_0;
vi. Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0\in A$;Πως ονομάζεται το x_0;
vii. Πότε μια συνάρτηση λέγεται άρτια; Τι γνωρίζεται για τη γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης;
viii. Πότε μια συνάρτηση λέγεται περιττή; Τι γνωρίζεται για τη γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης;

Βασικές ασκήσεις

9. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+10$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=3$.

β) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$.

10. Να βρείτε, αν υπάρχει το ελάχιστο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2-8x+19$ **β)** $g(x)=-\dfrac{6}{x^4+2}$ **γ)** $h(x)=\sqrt{x^2+4}-3$

11. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές:

α) $f_1(x)=3x^2+5x^4$ **β)** $f_2(x)=3|x|+1$ **γ)** $f_3(x)=|x+1|$

δ) $f_4(x)=x^3-3x^5$ **ε)** $f_5(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ **στ)** $f_6(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & , x\le 1 \\ 3x-7 & , x>1 \end{cases}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

β) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

13. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $f(2x-1)<f(x+3)$ **β)** $f(|x|+2)-f(3)>0$

14. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(-\alpha,\alpha)$, $\alpha>0$, είναι περιττή, να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x)+c$, $c>0$ ποια σχέση έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ;

ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x)-c$, $c>0$ ποια σχέση έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ;

iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x-c)$, $c>0$ ποια σχέση έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ;

iv. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x+c)$, $c>0$ ποια σχέση έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ;

Βασικές ασκήσεις

15. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $\varphi(x)=|x|$ **β)** $f(x)=|x|+2$ **γ)** $g(x)=|x-2|$ **δ)** $h(x)=|x+2|-1$

3ο Κεφάλαιο: Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

i. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου;

ii. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω, με $0^\circ\le\omega\le 360^\circ$;

iii. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που είναι μεγαλύτερες από 360° καθώς και οι αρνητικές γωνίες;

iv. Για κάθε $\kappa\in\mathbb{Z}$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$\eta\mu(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=$ $\sigma\upsilon\nu(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=$

$\varepsilon\varphi(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=$ $\sigma\varphi(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=$

v. Ποιος κύκλος λέγεται τριγωνομετρικός;

vi. Πως ορίζεται το συνημίτονο και το ημίτονο μιας γωνίας ω στον τριγωνομετρικό κύκλο;

vii. Ποιο είναι το διάστημα μεταβολών του $συνω,\ ημω$;

viii. Ποιο είναι το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών στα τέσσερα τεταρτημόρια;

ix. Να εξηγήσετε γιατί η εφαπτομένη του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο $A(1,0)$ είναι ο άξονας των εφαπτομένων.

x. Ποιο τόξο ονομάζεται τόξο ενός ακτινίου ή 1 rad; Τι είναι το ακτίνιο ή rad;

xi. Αν μια γωνία είναι μ° και α ακτίνια, τότε ποιος τύπος συνδέει το μ° με το α;

xii. Να γράψετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, καθώς και τα ακτίνια αυτών των γωνιών.

Βασικές ασκήσεις

16. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας:

α) 1830° **β)** 2940° **γ)** 1980° **δ)** 3600°

17. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία χ για την οποία να ισχύει: $ημx = λ^2 - 2λ + 4$, $λ \in \mathbb{R}$.

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει: $ημ^2ω + συν^2ω = 1$

ii. Να αποδείξετε ότι: $εφω = \frac{ημω}{συνω}$, $σφω = \frac{συνω}{ημω}$ και $εφω \cdot σφω = 1$

iii. Να αποδείξετε ότι $συν^2ω = \frac{1}{1+εφ^2ω}$ και $ημ^2ω = \frac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}$.

Βασικές ασκήσεις

18. Αν $ημx = \frac{3}{5}$ και $\frac{π}{2} < x < π$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

19. Αν $σφx = -2$ και $\frac{3π}{2} < x < 2π$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

20. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ημθ}{1+συνθ} + \frac{1+συνθ}{ημθ} = \frac{2}{ημθ}$ **β)** $\frac{εφα + σφβ}{εφβ + σφα} = \frac{εφα}{εφβ}$ **γ)** $συν^4χ - ημ^4χ = 2συν^2χ - 1$

21. Αν $ημx + συνx = α$, να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α τις παραστάσεις:

α) $ημx + συνx$ **β)** $\frac{1}{ημx} + \frac{1}{συνx}$ **γ)** $εφx + σφx$ **δ)** $ημ^3x + συν^3x$

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

i. Τι γνωρίζεται για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των αντίθετων γωνιών;

ii. Τι γνωρίζεται για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παραπληρωματικών γωνιών (άθροισμα 180°);

iii. Τι γνωρίζεται για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών που διαφέρουν κατά 180°;

iv. Τι γνωρίζεται για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών με άθροισμα 90°; (συμπληρωματικές γωνίες)

Βασικές ασκήσεις

22. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

α) 1200° **β)** -2850° **γ)** $\frac{187\pi}{6}$ **δ)** $\frac{21\pi}{4}$

23. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu(A+B)=\eta\mu\Gamma$ **β)** $\sigma\upsilon\nu(A+B)+\sigma\upsilon\nu\Gamma=0$ **γ)** $\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$

24. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu(5\pi+\omega)\sigma\upsilon\nu(7\pi-\omega)\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)}{\sigma\varphi(5\pi+\omega)\eta\mu(7\pi-\omega)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)}=\eta\mu^2\omega-1$

25. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{\eta\mu495^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu120^\circ+\sigma\upsilon\nu495^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu(-120^\circ)}{\varepsilon\varphi(-120^\circ)+\varepsilon\varphi495^\circ}$.

26. Αν για τις οξείες γωνίες Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\eta\mu B=\frac{\sqrt{11}}{4}$ και $\eta\mu\Gamma=\frac{\sqrt{5}}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

i. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται περιοδική;
ii. Ποια είναι η περίοδος των συναρτήσεων $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $h(x)=\varepsilon\varphi x$;
iii. Ποια είναι τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ σε διάστημα μιας περιόδου; Να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.
iv. Ποια είναι τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ σε διάστημα μιας περιόδου; Να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.
v. Ποια είναι τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=\varepsilon\varphi x$ σε διάστημα μιας περιόδου; Ποιες ευθείες λέγονται κατακόρυφες ασύμπτωτες της; Να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.
vi. Ποια είναι τα ακρότατα και ποια η περίοδος των συναρτήσεων $f(x)=\rho\eta\mu\omega x$, $g(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x$ με $\rho,\omega>0$;

Βασικές ασκήσεις

27. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=2\eta\mu x$, $h(x)=-2\eta\mu x$.

28. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\eta\mu x+1$, $h(x)=2\eta\mu x+1$.

29. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $g(x)=2\sigma\upsilon\nu x$, $h(x)=-2\sigma\upsilon\nu x$.

30. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x-1$, $h(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$.

31. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x)=\sigma\upsilon\nu(\pi-3x)+\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2}+3x\right)$

α) Να αποδείξετε ότι $g(x)=-2\sigma\upsilon\nu 3x$.

β) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $g(x)$, όταν $0\le x\le 2\pi$.

γ) Να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $g(x)=-1$ όταν $0\le x\le 2\pi$

32. Δίνεται η συνάρτηση: $h(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)-2\eta\mu(2x-\pi)$

α) Να αποδείξετε ότι $h(x)=3\eta\mu 2x$.

β) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $h(x)$, όταν $0\le x\le 2\pi$.

γ) Να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $h(x)=1$ όταν $0\le x\le 2\pi$

33. Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση $y=3\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$, όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.

α) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0\le t\le 12$.

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

i. Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x=\alpha$;

ii. Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x=\alpha$;

iii. Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\varepsilon\varphi x=\alpha$ και $\sigma\varphi x=\alpha$;

Βασικές ασκήσεις

34. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x=0$ **β)** $\eta\mu x=1$ **γ)** $\eta\mu x=-1$ **δ)** $\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **ε)** $\eta\mu x=-\frac{1}{2}$

στ) $\sigma\upsilon\nu x=0$ **ζ)** $\sigma\upsilon\nu x=1$ **η)** $\sigma\upsilon\nu x=-1$ **θ)** $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **ι)** $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

35. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu^2x+\eta\mu x-1=0$ **β)** $3\varepsilon\varphi^2t=3+2\sqrt{3}\varepsilon\varphi t$ **γ)** $\eta\mu^2x+5\sigma\upsilon\nu^2x=4$

δ) $\varepsilon\varphi x\cdot\eta\mu x+1=\eta\mu x+\varepsilon\varphi x$ **ε)** $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi 2x=1$

36. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$ **β)** $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=-\sqrt{3}$ **γ)** $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

δ) $\eta\mu\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=-\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ **ε)** $\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

στ) $\sigma\upsilon\nu\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ **ζ)** $\varepsilon\varphi\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ **η)** $\varepsilon\phi\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\varepsilon\phi x=0$

37. Δίνεται η εξίσωση: $\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0$

α) Να λύσετε την εξίσωση.

β) Ποιες από τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(0,3\pi)$;

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

i. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$

ii. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$

iii. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$

iv. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$

v. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$

vi. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$

vii. Να γράψετε τους τύπους που συνδέουν τα $\sigma\varphi(\alpha+\beta)$ και $\sigma\varphi(\alpha-\beta)$ με τα $\sigma\varphi\alpha$ και $\sigma\varphi\beta$.

Βασικές ασκήσεις

38. Να αποδείξετε ότι: **α)** $\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta=\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}$ **β)** $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu x$

γ) $\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}+\frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha}=0$

39. Αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=0$, να αποδείξετε ότι $\eta\mu(\alpha+2\beta)=\eta\mu\alpha$.

40. Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ **β)** $\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-2$

41. Αν $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι $(1+\varepsilon\varphi\alpha)(1+\varepsilon\varphi\beta)=2$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

i. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1=1-2\eta\mu^2\alpha$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi 2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$.

iv. Να αποδείξετε ότι $ημ^2α=\frac{1-συν2α}{2}$, $συν^2α=\frac{1+συν2α}{2}$, $εφ^2α=\frac{1-συν2α}{1+συν2α}$

Βασικές ασκήσεις

42. Να αποδείξετε ότι:

α) $ημ^2α+συν2α=συν^2α$ **β)** $\frac{ημ2α}{1-ημ^2α}=2εφα$ **γ)** $εφα+σφα=\frac{2}{ημ2α}$

43. Να υπολογίσετε την $εφ(α+2β)$, αν $εφα=\frac{1}{4}$ και $εφβ=\frac{1}{3}$.

44. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ημ2α}{1+συν2α}=εφα$ **β)** $\frac{1-συν2α+ημ2α}{1+συν2α+ημ2α}=εφα$

45. Αν $3συν^2x+5συνx-2=0$ και $ημx>0$ να υπολογιστούν το ημ2x και το συν2x.

46. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $συν2x-ημx-1=0$ **β)** $ημ2x-2συνx+ημx-1=0$

β) $συν2x+2συν^2\frac{x}{2}=0$ **δ)** $συνx-2ημ^2\frac{x}{2}=0$

Γενικές ασκήσεις τριγωνομετρίας

47. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=α+2ημ(2βx)$ και $g(x)=α+β+συν((α+β)x)$, $α,β>0$.
Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και την ίδια περίοδο, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $α=β=1$.

β) Να βρείτε τη τιμή της παράστασης $A=f\left(\frac{π}{3}\right)+g\left(\frac{π}{4}\right)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+3=2g(x)$ στο διάστημα $[π,2π)$.

48 Έστω η συνάρτηση $f(x)=(α+1)συν(βπx)$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 3 και η περίοδός της είναι 4, να αποδείξετε ότι $α=2$ και $β=\frac{1}{2}$.

β) Για τις τιμές $α=2$ και $β=\frac{1}{2}$,να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{3}{2}$.

49. Η συνάρτηση $f(x)=ρημ(ωx)$ έχει περίοδο π και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{π}{4},3\right)$.

α) Να βρείτε τα ρ,ω.

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0,2π]$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x+\frac{π}{3}\right)=f\left(x-\frac{π}{6}\right)$

50. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\sigma\upsilon\nu(20\pi-x)+2}{\eta\mu\left(\dfrac{7\pi}{2}+x\right)+\eta\mu(5\pi-x)+4}$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.
β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
γ) Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο 2π.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{1}{2}$.

51. Έστω η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=\eta\mu x$

52. Δίνεται η παράσταση: $f(x)=\eta\mu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x+2$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να παραγοντοποιήσετε την f.
β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$.
γ) Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες $f(x)=0$.
δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π.
στ) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο το 4.

4ο Κεφάλαιο: Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις

Πολυώνυμα

i. Τι ονομάζεται μονώνυμο του x;
ii. Τι ονομάζεται πολυώνυμο του x;
iii. Ποιο πολυώνυμο λέγεται σταθερό και ποιο μηδενικό;
iv. Πότε τα πολυώνυμα $\alpha_\mu x^\mu+\alpha_{\mu-1}x^{\mu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $\beta_\nu x^\nu+\beta_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\beta_1 x+\beta_0$ με $\mu\geq\nu$, είναι ίσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$;
v. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $\alpha_\mu x^\mu+\alpha_{\mu-1}x^{\mu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_\mu\neq 0$
vi. Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x=\rho$; Πότε το ρ λέγεται ρίζα του πολυωνύμου;
vii. Ποιος είναι ο βαθμός του αθροίσματος και του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων;

Βασικές ασκήσεις

53. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$, το πολυώνυμο

$P(x)=(4\mu^3-\mu)x^3+4\left(\mu^2-\dfrac{1}{4}\right)x-2\mu+1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

54. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x)=(\alpha^2-3\alpha)x^3+x^2+\alpha$ και $Q(x)=-2x^3+\alpha^2x^2+(\alpha^3-1)x+1$ είναι ίσα.

55. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ,μ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\lambda x^2+\mu x+6$ έχει ρίζα το 1 και η τιμή του για $x=-2$ είναι -12.

56. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύει: $(2x+1)P(x)=2x^3-9x^2-3x+1$.

Διαίρεση πολυωνύμων

i. Ποια είναι η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $\Delta(x)$ με το πολυώνυμο $\delta(x)$;

ii. Πότε το πολυώνυμο $\delta(x)$ διαιρεί ή είναι παράγοντας του $\Delta(x)$;

iii. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$, δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$.

iv. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

Βασικές ασκήσεις

57. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-1$ είναι 8 και με το $x+2$ είναι -7, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)(x+2)$.

58. Να βρείτε τις τιμές του k, για τις οποίες το $x-1$ είναι παράγοντας του $g(x)=k^2x^4+3kx^2-4$.

59. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-6x^3+5x^2-3x+2$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και να βρείτε το πηλίκο.

60. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-(3+\alpha)x+\beta+10$ να έχει για παράγοντα το $(x-2)^2$.

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

i. Ποια εξίσωση λέγεται πολυωνυμική εξίσωση ν βαθμού; Πότε ο αριθμός ρ είναι ρίζα της;

ii. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1x+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές. Να αποδείξετε ότι αν ο ακέραιος $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Βασικές ασκήσεις

61. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3+2x^2-9x-18=0$ **β)** $x^4-3x^3+6x-4=0$ **γ)** $(x-1)^6-9(x-1)^3+8=0$

62. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2x^5-162x\le 0$ **β)** $(x^3-x^2+2x-2)(x^2-9)>0$

γ) $x^4-6x^3+22x^2-30x+13\le 0$ **δ)** $x^4-x^3+x^2-3x-6\ge 0$

63. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

64. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ το $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-16x-12$ έχει παράγοντες τους $x+1$ και $x-2$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Βασικές ασκήσεις

65. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\sqrt{x+3}=x+1$ **β)** $\sqrt{x+3}=\sqrt{10-x}+1$ **γ)** $2\eta\mu^4x-3\eta\mu^3x-3\sigma\upsilon\nu^2x-3\eta\mu x+4=0$

66. Να λύσετε τις ανισώσεις: **α)** $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\le 0$ **β)** $\dfrac{2x+3}{x-1}>4$ **γ)** $\sqrt{x-3}>x-5$

Γενικές ασκήσεις στα πολυώνυμα

67. Έστω P(x) πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού, το οποίο διαιρείται με το x^2+1, έχει ρίζα το 0 και του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 2.
α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x$.
β) Να λύσετε την ανίσωση $(P(x)-2)^3+(P(x)-2)^2+P(x)>2$

68. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι το $x+1$ είναι παράγοντας του $f(x)$ και να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του $f(x)$ με το $\pi(x)$.
β) Να αποδείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$ και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $\pi(x)$ με το $x-2$.
γ) Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

69. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=kx^3-(k+\lambda)x^2+\lambda x+1,\ k,\lambda\in\mathbb{R}$
α) Αν $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7$ και $P(-1)=23$, να αποδείξετε ότι $k=-6$ και $\lambda=-5$.
β) Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$, για $k=-6$ και $\lambda=-5$, με το πολυώνυμο $2x+1$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.
γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x)>7$ για $k=-6$ και $\lambda=-5$.

70. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$.
α) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x=-1$.
β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

71. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-8x^3+(5\alpha-1)x^2+8x-3\alpha-6$,$\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$ δια του x^2-1 και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β) Να βρείτε τη τιμή του α, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ) Για $\alpha=3$, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

5ο Κεφάλαιο: Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

Εκθετική συνάρτηση

i. Πως ορίζονται οι δυνάμεις με ρητό εκθέτη;
ii. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη πραγματικό αριθμό.
iii. Ποια συνάρτηση λέγεται εκθετική με βάση α;
iv. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ όταν $\alpha>1$ και όταν $0<\alpha<1$.
v. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και η μονοτονία της $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>1$;
vi. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και η μονοτονία της $f(x)=\alpha^x$ με $0<\alpha<1$;
vii. Τι γνωρίζετε για τον αριθμό e;

Βασικές ασκήσεις

72. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=3^x$ και $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

β) $f(x)=3^x$, $f_2(x)=3^x+2$ και $f_3(x)=3^x-3$

γ) $f(x)=3^x$, $f_2(x)=3^{x-2}$ και $f_3(x)=3^{x+2}$

δ) $f(x)=e^x$, $f_1(x)=3^{x+2}, f_2(x)=e^{-x}$ και $f_3(x)=e^{-x}+2$

73. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}\right)^x$. Για ποιες από αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι:

α) γνησίως φθίνουσα **β)** γνησίως αύξουσα

74. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^x=64$ **β)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$ **γ)** $27^{4x}=9^{x+1}$ **δ)** $3^{x^2-x-2}=1$

ε) $2\cdot4^x-5\cdot2^x+2=0$ **στ)** $3^x+3^{x-1}=\frac{45}{3^{x+2}}+\frac{7}{3^x}$ **ζ)** $21\cdot3^x+5^{x+3}=3^{x+4}+5^{x+2}$

75. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $5^{x^2-5x+6}<1$ **β)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$ **γ)** $10^{2x}-101\cdot10^x+100<0$

76. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32\cdot 4^{4y-1} \\ 5\cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1} \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 3^x + 2^y = 11 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} e^x : e^y = 1 \\ e^x \cdot e^y = e^2 \end{cases}$

Λογάριθμοι

i. Να δώσετε τον ορισμό του λογάριθμου θ με βάση το α.
ii. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:
$\log_\alpha \alpha^x =$ $\alpha^{\log_\alpha \theta} =$ $\log_\alpha 1 =$ $\log_\alpha \alpha =$
iii. Να γράψετε τις ιδιότητες των λογαρίθμων.
iv. Να αποδείξετε ότι $\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$.
v. Να αποδείξετε ότι $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa\log_\alpha\theta$.
vi. Ποιοι λογάριθμοι λέγονται φυσικοί ή νεπέριοι;

Βασικές ασκήσεις

77. Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους: **α)** $\log_{10} 0,001$ **β)** $\log_{\frac{1}{10}}\sqrt{10}$ **γ)** $\log_2 32$

78. Να βρείτε τη τιμή του x για την οποία ισχύει:
α) $\log_{10} x = 3$ **β)** $\log_4 x = -\dfrac{1}{2}$ **γ)** $\log_x 16 = 4$

79. Να αποδείξετε ότι:
α) $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2$ **β)** $\dfrac{1}{2}\log 25 + \dfrac{1}{3}\log 8 - \dfrac{1}{5}\log 32 = 1 - \log 2$
γ) $2\log_2\left(2+\sqrt{2}\right) + \log_2\left(6-4\sqrt{2}\right) = 2$ **δ)** $2^{\log_2 6 - 2\log_2\sqrt{3}} = 2$

Λογαριθμική συνάρτηση

i. Ποια συνάρτηση λέγεται λογαριθμική με βάση $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$;
ii. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$, $\alpha > 1$. Ποια συμμετρία ικανοποιούν;
iii. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha < 1$. Ποια συμμετρία ικανοποιούν;
iv. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και η μονοτονία της $f(x) = \log_\alpha x$ με $\alpha > 1$;
viii. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και η μονοτονία της $f(x) = \log_\alpha x$ με $0 < \alpha < 1$;

Βασικές ασκήσεις

80. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
$f(x) = \log x$, $g(x) = \log x - 1$ και $h(x) = \log(x-1)$.

81. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\log(x-1) + \log x = 1 - \log 5$ **β)** $\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

γ) $\ln^4 x - 5\ln^2 x + 4 = 0$ **δ)** $5^x = 2^{1-x}$

82. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\log x^2 > (\log x)^2$ **β)** $\log(x^2 - 4) < \log 3x$ **γ)** $x^{\log x} > 10$

83. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\log_3 2$ και $\log_3 5$ **β)** $\log_{0,3} 5$ και $\log_{0,3} 7$ **γ)** $\log(x^2+1)$ και $\log 2x$

84. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές:

α) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ **β)** $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$

85. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $\log 178$, $\log\sqrt{81(2^x + 2\cdot 3^x)}$, $x\log 3$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

86. Να λύσετε τα συστήματα: **α)** $\begin{cases} \log(xy) = 4\log 2 \\ \log x \cdot \log y = 3(\log 2)^2 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} y = 2x \\ 2\log y = \log x + \log 2 \end{cases}$

Γενικές ασκήσεις εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της **β)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

δ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = (e^x + 5)e^{f(x)}$.

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1 **ii.** Να λύσετε την εξίσωση $g(\eta\mu x + x) = g(x)$

88. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g **β)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$ **δ)** Να αποδείξετε ότι η g είναι $1-1$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $g(x) - g(1) = f(0)$

89. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ και $g(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση.

β) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) - g^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $g(\alpha - \beta) = g(\alpha)f(\beta) - g(\beta)f(\alpha)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 2g(x) = 1$.

Στέλιος Μιχαήλογλου