21η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
BMO 2004

Μάιος 2004, Πλέβεν – Βουλγαρία

Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου – Ανδρέας Σαββίδης

Πρόβλημα 1. Η ακολουθία πραγματικών αριθμών $a_0, a_1, a_2, ...$ ικανοποιεί την σχέση

$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους m και n, $m \geq n$. Αν $a_1 = 3$ να υπολογίσετε τον a_{2004}.

Πρόβλημα 2. Να βρείτε τους πρώτους αριθμούς x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^y - y^x = xy^2 - 19$.

Πρόβλημα 3. Έστω O ένα εσωτερικό σημείο του οξυγωνίου τριγώνου ABC. Οι κύκλοι με κέντρα τα μέσα των πλευρών του, που διέρχονται από το O, τέμνονται ανά δύο στα σημεία K, L και M , διαφορετικά από το O. Να αποδείξετε ότι το O είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου KLM αν και μόνον αν το O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC.

Πρόβλημα 4. Το επίπεδο χωρίζεται σε περιοχές από ένα πεπερασμένο αριθμό ευθειών που ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Δύο περιοχές ονομάζονται ″γειτονικές″ αν η τομή των συνόρων τους είναι είτε ευθύγραμμο τμήμα, είτε ημιευθεία, είτε ευθεία(ένα σημείο δε θεωρείται ευθύγραμμο τμήμα). Ένας ακέραιος αριθμός τοποθετείται σε κάθε περιοχή με τον παρακάτω τρόπο:

(i) το γινόμενο των ακεραίων που τοποθετούνται σε οποιεσδήποτε δύο γειτονικές περιοχές είναι μικρότερο από το άθροισμά τους.

(ii) για κάθε μια από τις δοσμένες ευθείες και καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που αυτή ορίζει, το άθροισμα των ακεραίων που τοποθετούνται σε όλες τις περιοχές που βρίσκονται σε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα ξεχωριστά, είναι ίσο με το μηδέν.

Να αποδείξετε ότι αυτή η τοποθέτηση των ακεραίων είναι δυνατή αν και μόνο αν οι ευθείες δεν είναι όλες παράλληλες.

Διαθέσιμος χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Η ακολουθία πραγματικών αριθμών $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ικανοποιεί την σχέση

$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους m και n, $m \geq n$. Αν $a_1 = 3$ να υπολογίσετε τον a_{2004}.

Α' Λύση. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$m = 0, n = 0 \Rightarrow a_0 = 1$

$n = 0 \Rightarrow a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$

$m = 1 \Rightarrow a_2 = 7$

$m = 2 \Rightarrow a_4 = 21$

$m = 2, n = 1 \Rightarrow a_13 = 13$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n = n^2 + n + 1$, το οποίο μπορεί να αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή.

- Έστω ότι $n = 1 \Rightarrow a_1 = 3$. Ισχύει.
- Δεχόμαστε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$ δηλ. $a_k = k^2 + k + 1$
- Θα αποδείξουμε ότι ισχύει ότι για $n = k + 1$ δηλ.

$$a_{k+1} = (k+1)^2 + k + 1 + 1 = (k+1)^2 + k + 2$$

- Ισχύει $a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \dfrac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$

για $m = k, n = 0 \ \Rightarrow \ a_k + a_k - k - 1 = \frac{1}{2}\left(a_{2k} + a_0\right) \Rightarrow 4a_k - 2k - 2 = a_{2k} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(k^2 + k + 1) - 2k - 2 = a_{2k} + 1 \Rightarrow a_{2k} = 4k^2 + 2k + 1$

για $k \longrightarrow \frac{k+1}{2} \Rightarrow a_{k+1} = 4\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{k+1}{2}\right) + 1 \Rightarrow a_{k+1} = \left(k+1\right)^2 + (k+1) + 1$

δηλ. η πρόταση ισχυεί για $n = k + 1$, άρα ισχύει $\forall n \in \mathbf{N}$.

Άρα έχουμε: $a_{2004} = 2004^2 + 2005$

Β΄ Λύση. Εάν θέσουμε $m = n$, $a_n \ \ a_{2m} + a_0 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2m})a_0 = 0$

Για $n = 0 \ \ a_m + a_m = \frac{1}{2}\left(a_{2m} + a_0\right) \Rightarrow a_{2m} = 4a_m$ (1)

Εάν $m = n + 2 \ \Rightarrow a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}\left(a_{2n+4} + a_{2n}\right)$ (2)

Από την (1) $\Rightarrow a_{2n+2} = 4a_{n+1}$ και $a_2 = 4a_1 = 4$

$\Rightarrow a_{2n+2} + a_2 = 4a_{n+1} + 4a_1 = 4\left(a_{n+1} + 1\right)$ (3)

Από την (2) και (1) $\Rightarrow a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}(4an + 2 + 4a_n) = 2a_{n+2} + 2a_n$ (4)

Από την (3) και (4) $\Rightarrow$ $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2, \ a_0 = 0, a_1 = 1.$

Έχουμε $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16, \ldots$ υποθέτουμε ότι $a_n = n^2$ και το αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή.

Για $n = 0$ και $n = 1$ η πρόταση ισχύει.

Έστω ότι ισχύουν οι προτάσεις $a_n = n^2$ και $a_{n+1} = n + 1^2$ για $n \geq 0$.

$$a_{n+2} = 2(n+1)^2 - n^2 + 2 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

Άρα, $a_{2003} = 2003^2 = 4012009$

Πρόβλημα 2. Να βρείτε τους πρώτους αριθμούς x, y που ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^y - y^x = xy^2 - 19. \qquad (1)$$

Λύση. Εάν $x = y \Rightarrow 0 = x^3 - 19 \Rightarrow x^3 = 19$ αδύνατη ($x \in \mathbb{N}$)

Παίρνουμε και στα δύο μέλη της (1) $mod(y)$ και $mod(x)$ έχουμε

$$x + 19 \equiv 0(mody) \qquad (2)$$

και $$19 - y \equiv 0(modx) \qquad (3)$$

Από (2) και (3) έχουμε $xy / (x - y + 19)$ (4)

Τώρα έχουμε

$x + y + 19 \geq |x - y + 19| \geq xy \quad \Rightarrow \quad (x-1)(y-1) < 20 \quad \Rightarrow \quad |x - y| < 19$

$\Rightarrow \quad x - y + 19 \geq xy \quad \Rightarrow \quad (x+1)(y-1) \leq 18 \quad (5)$

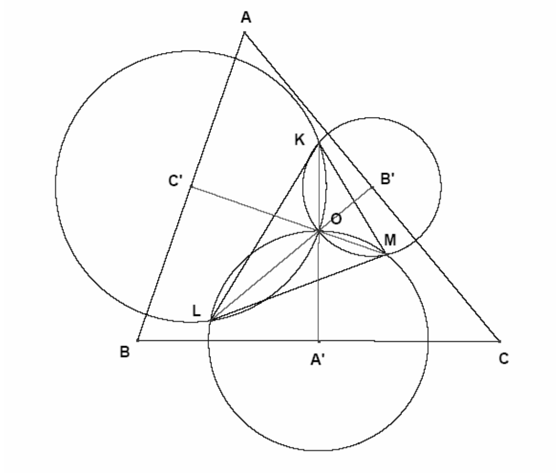
Από την (5) εάν $x \geq 5$ τότε έχουμε $y = 2$ ή $y = 3$, $x^2 - 2^x < 0$, $x^3 - 3^x < 0$, $xy^2 - 19 > 0$.

Άρα οι μοναδικές λύσεις είναι (2,3) και (2,7).

Πρόβλημα 3. Έστω O ένα εσωτερικό σημείο του οξυγωνίου τριγώνου ABC. Οι κύκλοι με κέντρα τα μέσα των πλευρών του, που διέρχονται από το O, τέμνονται ανά δύο στα σημεία K, L και M, διαφορετικά από το O. Να αποδείξετε ότι το O είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου KLM αν και μόνον αν το O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC.

Λύση. Έστω A', B', C' είναι τα μέσα των πλευρών BC, CA, AB του τριγώνου ABC αντίστοιχα.

$''\longrightarrow''$ Έστω Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC $\Rightarrow$ το τρίγωνο ABC είναι οξυγώνιο.



Από τις ισότητες:

$$\angle A'C'O = \frac{1}{2}\angle LC'O = \frac{1}{2}\widehat{LO} = \angle LKO, \quad \angle A'B'O = \frac{1}{2}\angle MB'O = \frac{1}{2}\widehat{MO} = \angle MKO$$

$\Rightarrow \angle A'C'O = \angle A'B'O = 90^o - \angle BAC$ άρα έχουμε ότι $\angle LKO = \angle MKO \Rightarrow KO$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle LKM$.

Ανάλογα έχουμε MO είναι διχοτόμος της $\angle LMK$ άρα το σημείο O είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου KLM.

$''\longleftarrow''$ Έστω O είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο KLM άρα $\angle LKO = \angle MKO.$

Όπως και πιο πάνω ισχύει $\angle LKO = \angle A'C'O$ και $\angle MKO = \angle A'B'O \Rightarrow$
$\angle A'C'O = \angle A'B'O.$

Ανάλογα έχουμε: $\angle C'A'O = \angle C'B'O$ και $\angle B'A'O = \angle B'C'O$

$\Rightarrow \angle C'A'O + \angle A'C'O + \angle B'C'O = \frac{1}{2}180^o = 90^o$

$\Rightarrow A'O \perp BC(B'C'//BC) \Rightarrow A'O \perp BC.$

Ανάλογα $B'O \perp AC \Rightarrow O$ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC.

Ανάλογα $B'O \perp AC \Rightarrow O$ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC.

Πρόβλημα 4. Το επίπεδο χωρίζεται σε περιοχές από ένα πεπερασμένο αριθμό ευθειών που ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Δύο περιοχές ονομάζονται ″γειτονικές″ αν η τομή των συνόρων τους είναι είτε ευθύγραμμο τμήμα, είτε ημιευθεία, είτε ευθεία(ένα σημείο δε θεωρείται ευθύγραμμο τμήμα). Ένας ακέραιος αριθμός τοποθετείται σε κάθε περιοχή με τον παρακάτω τρόπο:

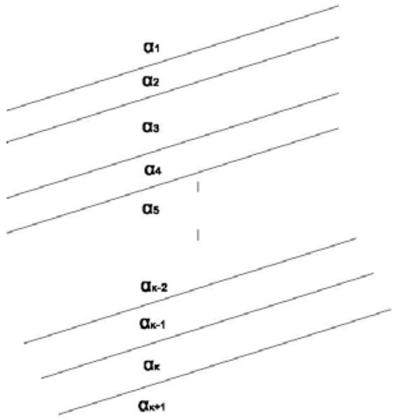
(i) το γινόμενο των ακεραίων που τοποθετούνται σε οποιεσδήποτε δύο γειτονικές περιοχές είναι μικρότερο από το άθροισμά τους.

(ii) για κάθε μια από τις δοσμένες ευθείες και καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που αυτή ορίζει, το άθροισμα των ακεραίων που τοποθετούνται σε όλες τις περιοχές που βρίσκονται σε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα ξεχωριστά, είναι ίσο με το μηδέν.

Να αποδείξετε ότι αυτή η τοποθέτηση των ακεραίων είναι δυνατή αν και μόνο αν οι ευθείες δεν είναι όλες παράλληλες.

Λύση. Εάν όλες οι ευθείες είναι παράλληλες ελέγχουμε ότι όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι με μηδέν και τότε η συνθήκη (i) δεν ισχύει.

Έστω ότι το επίπεδο χωρίζεται σε περιοχές από κ παράλληλες ευθείες.



Από την συνθήκη (ii) ισχύουν:

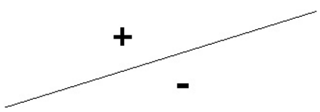
$$a_1 = a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} = 0$$
$$a_1 + a_2 = a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} = 0$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = \ldots + a_k + a_{k+1} = 0$$
$$\vdots$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = a_k + a_{k+1} = 0$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = a_{k+1} = 0$$

$\Rightarrow \; a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_k = a_{k+1} = 0 \; \Rightarrow$ δεν ισχύει η συνθήκη (i), άρα οι ευθείες δεν μπορεί να είναι παράλληλες.

Εάν υπάρχουν δύο μη παράλληλες ευθείες τότε θα δείξουμε πως θα προσδιορίσουμε τους ζητούμενους αριθμούς.

Αρχικά μπορούμε να τοποθετήσουμε πρόσημα + και -, σε κάθε περιοχή, έτσι ώστε τα πρόσημα στις γειτονικές περιοχές να είναι διαφορετικά, και αυτό αποδεικνύεται ότι ισχύει με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

- για $n = 1$ ευθεία έχουμε:



- Υποθέτουμε ότι ισχύει στην περίπτωση κατά την οποία το επίπεδο χωρίζεται σε περιοχές από $n = k$ ευθείες.

- Για $n = k + 1$ ευθείες θα αλλάξουμε τα πρόσημα σε όλες τις περιοχές που βρίσκονται στην μια πλευρά της ευθείας που έχουμε προσθέσει ($k+1$ ευθείες) και να κρατήσουμε τα ίδια πρόσημα στην άλλη πλευρά της ευθείας.

Σε κάθε περιοχή τοποθετούμε αριθμούς $s \cdot a$, όπου s είναι ήδη το ορισμένο πρόσημο σε αυτή την περιοχή και a είναι ο αριθμός των ″κορυφών″ στην περιοχή.

Ελέγχουμε ότι οι ζητούμενες συνθήκες ικανοποιούνται.

- Σε κάθε ζεύγος γειτονικών περιοχών έχουμε δύο ακέραιους αριθμούς, π.χ. a και b, έτσι ώστε ο ένας από αυτούς είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός. Έστω $a < 0 < b$. Είναι προφανές ότι $ab \leq< a + b$, δηλαδή ισχύει η πρώτη συνθήκη.

- Σε κάθε σημείο τομής μετρούμε δύο ή τέσσερις φορές (σε 2 ή 4 γωνίες στις γειτονικές περιοχές) με διαφορετικά πρόσημα (+ και – στην περίπτωση των δύο περιοχών και +,+,-,- στην περίπτωση τεσσάρων περιοχών) π.χ.