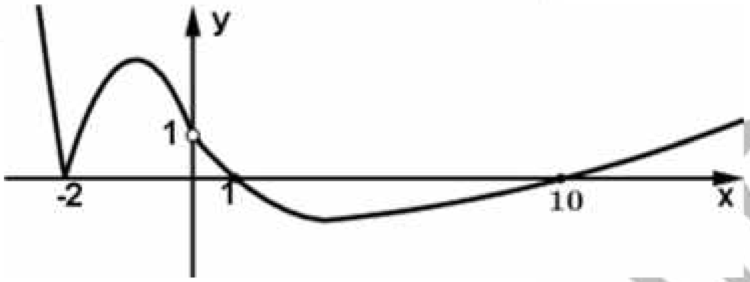
20η Άσκηση

Έως το Θ.Rolle

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-2,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-x^3}{x}$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|g(x)|}$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{f(x)-1}$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

δ) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,10)$ τέτοιο, ώστε $x_0 f'(x_0)-f(x_0)=2x_0^3$.

στ) Αν η γραφική παράσταση της g έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(1,g(1))$ την ευθεία ε: $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(1,f(1))$.

ζ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1-x^2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2,1)$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{|g(x)|}\overset{\substack{g(x)=\omega\\ x\to 1\Rightarrow\\ \omega\to 0}}{=}\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{1}{|\omega|}=+\infty$

β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $g(1)=0\Leftrightarrow\frac{f(1)-1^3}{1}=0\Leftrightarrow f(1)=1$ και για κάθε $x\in(0,1)$ είναι

$g(x)>0\Leftrightarrow\frac{f(x)-x^3}{x}>0\overset{x\in(0,1)}{\Leftrightarrow} f(x)-x^3>0\Leftrightarrow f(x)>x^3$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ge\lim\limits_{x\to 1^-} x^3=1$ άρα $f(x)\ge 1$ στο (0,1).

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{f(x)-1}\overset{\substack{f(x)-1=y\\ y\to 0^+}}{=}\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{1}{y}=+\infty$

γ) Από το σχήμα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ άρα σε μια περιοχή του $-\infty$ είναι $\frac{f(x)-x^3}{x}>0$ και επειδή $x<0$, είναι και $f(x)-x^3<0\Leftrightarrow f(x)<x^3$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)>0$ άρα σε μια περιοχή του $+\infty$ είναι $\frac{f(x)-x^3}{x}>0$ και επειδή $x>0$ είναι $f(x)-x^3>0\Leftrightarrow f(x)>x^3$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

δ) Για $x\ne 0$ είναι $g(x)=\frac{f(x)-x^3}{x}\Leftrightarrow f(x)=xg(x)+x^3$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,+\infty)$, είναι συνεχής στο $x=0$ οπότε:

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot g(x)+x^3\right)=0$

ε) Είναι $g(1)=g(10)=0$ και η g είναι συνεχής στο $[1,10]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,10)$ με

$$g'(x)=\frac{\left(f(x)-x^3\right)'x-\left(f(x)-x^3\right)x'}{x^2}=\frac{xf'(x)-3x^3-f(x)+x^3}{x^2}=\frac{xf'(x)-2x^3-f(x)}{x^2}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0\in(1,10)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0)=0\Leftrightarrow$

$\frac{x_0f'(x_0)-2x_0^3-f(x_0)}{x_0^2}=0\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-2x_0^3-f(x_0)=0\ \ x_0f'(x_0)-f(x_0)=2x_0^3$

στ) Επειδή η ε εφάπτεται της C_g στο Α είναι $g'(1)=-\frac{1}{2}$. Όμως

$g'(x)=\left(\frac{f(x)-x^3}{x}\right)'=\frac{\left(f'(x)-3x^2\right)x-\left(f(x)-x^3\right)}{x^2}$ άρα

$g'(1)=\frac{f'(1)-3-f(1)+1}{1^2}\Leftrightarrow f'(1)-2-f(1)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)-2-1=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)=\frac{5}{2}$

Η εφαπτομένη της C_f στο Β έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=\frac{5}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$

ζ) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $g(-2)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f(-2)-(-2)^3}{-2}=0 \Leftrightarrow f(-2)=-8$ και

$g(1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f(1)-1^3}{1}=0 \Leftrightarrow f(1)=1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-1+x^2,\ x\in[-2,1]$. Η h είναι συνεχής στο $[-2,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. $h(-2)=f(-2)-1+4=-5<0,\ h(1)=f(1)-1+1=1>0$, δηλαδή $h(0)h(1)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=1-x^2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2,1)$