10η Άσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha+2\eta\mu(2\beta x)$ και $g(x)=\alpha+\beta+\sigma\upsilon\nu((\alpha+\beta)x)$, $\alpha,\beta>0$. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και την ίδια περίοδο, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$.

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f,g όταν $x\in[0,2\pi]$.

γ) Να βρείτε τη τιμή της παράστασης $A=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+3=2g(x)$. Ση συνέχεια να βρείτε γραφικά τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)+3>2g(x)$ όταν $x\in(0,\pi)$.

ε) Έστω η συνάρτηση $h(x)=g(x)-(f(x)-1)^3$.

i. Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο π.

ii. Να δείξετε ότι η h είναι άρτια.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

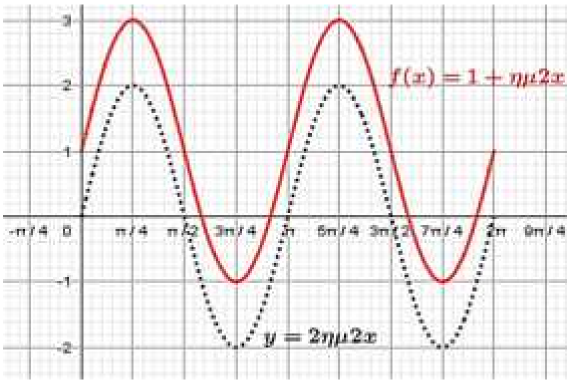
α) Είναι $-1 \le ημ(2βx) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2ημ(2βx) \le 2 \Leftrightarrow α-2 \le α+2ημ(2βx) \le α+2$, άρα $f_{max} = α+2$

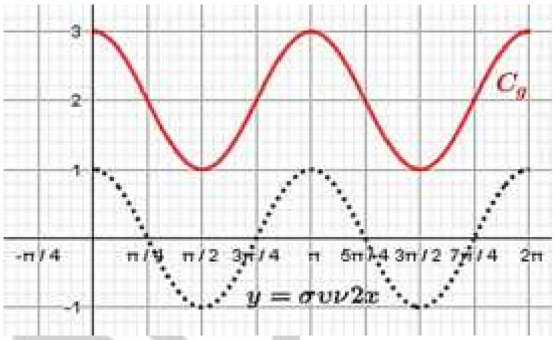
Είναι $-1 \le συν((α+β)x) \le 1 \Leftrightarrow α+β-1 \le α+β+συν((α+β)x) \le α+β+1$, άρα $g_{max} = α+β+1$

$f_{max} = g_{max} \Leftrightarrow α+2 = α+β+1 \Leftrightarrow β=1$

Είναι $T_f = \frac{2π}{2β} = π$ και $T_g = \frac{2π}{α+1}$. $T_f = T_g \Leftrightarrow \cancel{π} = \frac{2\cancel{π}}{α+1} \Leftrightarrow α+1=2 \Leftrightarrow α=1$.

β) $f(x) = 1+2ημ(2x)$ $\qquad$ $g(x) = 2+συν(2x)$





γ) $A = f\left(\frac{π}{3}\right) + g\left(\frac{π}{4}\right) = 1+2ημ\frac{2π}{3} + 2 + συν\frac{π}{2} = 3+2ημ\left(π-\frac{π}{3}\right) = 3+2ημ\frac{π}{3} = 3+\sqrt{3}$

δ) $f(x)+3 = 2g(x) \Leftrightarrow 1+2ημ2x+3 = 2(2+συν2x) \Leftrightarrow \cancel{4}+2ημ2x = \cancel{4}+2συν2x \Leftrightarrow$

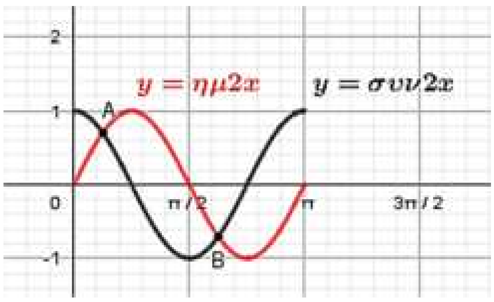
$ημ2x = συν2x \Leftrightarrow \frac{ημ2x}{συν2x} = 1 \Leftrightarrow εφ2x = 1 \Leftrightarrow 2x = κπ+\frac{π}{4} \Leftrightarrow x = \frac{κπ}{2}+\frac{π}{8},\ κ \in \mathbb{Z}$

$f(x)+3 > 2g(x) \Leftrightarrow ημ2x > συν2x$

Γνωρίζουμε ότι στο διάστημα $(0,π)$ είναι $ημ2x = συν2x$

όταν $2x = \frac{π}{4} \Leftrightarrow x = \frac{π}{8}$ και $2x = π+\frac{π}{4} = \frac{5π}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5π}{8}$

οπότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $\left(\frac{π}{8}, \frac{5π}{8}\right)$.



ε) $h(x) = 2+συν2x-(\cancel{1}+2ημ2x-\cancel{1})^2 = 2+συν2x-4ημ^2 2x$.

$D_h = \mathbb{R}$.

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $(x+π) \in \mathbb{R}, (x-π) \in \mathbb{R}$.

$h(x+π) = 2+συν2(x+π)-4ημ^2 2(x+π) = 2+συν(2x+2π)-4ημ^2(2x+2π) \Leftrightarrow$

$h(x+π) = 2+συν2x-4ημ^2 2x = h(x)$

$h(x-π) = 2+συν2(x-π)-4ημ^2 2(x-π) = 2+συν(2x-2π)-4ημ^2(2x-2π) \Leftrightarrow$

$h(x-π) = 2+συν2x-4ημ^2 2x = h(x)$.

Επειδή $h(x+π) = h(x) = h(x-π)$ η h είναι περιοδική με περίοδο $T = π$.

ii. Είναι $h(-x) = 2+συν(-2x)-4ημ^2(-2x) = 2+συν2x-4(-ημ2x)^2 = 2+συν2x-4ημ^2 2x = h(x)$

οπότε η h είναι άρτια.