Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Εξισώσεις

Πως αποδεικνύω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει:

- **το πολύ κ ρίζες**
  - Υποθέτω ότι η f έχει κ+1 ρίζες και με εφαρμόζοντας διαδοχικά θεωρήματα Rolle προκύπτει άτοπο.
- **το πολύ 1 ρίζα**
  - 1ος τρόπος: Αποδεικνύω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
  - 2ος τρόπος: Υποθέτω ότι η f έχει δύο ρίζες $\rho_1<\rho_2$ και με θεώρημα Rolle στο $[\rho_1,\rho_2]$ καταλήγουμε σε άτοπο.
- **τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β)**
  - 1ος τρόπος: Εφαρμόζω το Θεώρημα Bolzano για την f στο [α,β].
  - 2ος τρόπος: Θεωρώ τη συνάρτηση F(x) με F΄(x)=f(x) (την παράγουσα της f) και εφαρμόζω θεώρημα Rolle στο [α,β].
- **ακριβώς μία ρίζα στο (α,β)**
  - Αποδεικνύω ότι η f έχει ταυτόχρονα τουλάχιστον μια ρίζα και το πολύ 1 ρίζα.
- **ακριβώς μία ρίζα**
  - 1ος τρόπος: Βρίσκω προφανή ρίζα της f και στη συνέχεια αποδεικνύω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
  - 2ος τρόπος: Βρίσκω το Σύνολο τιμών της f. Αν το μηδέν περιέχεται μόνο μια φορά στο Σύνολο Τιμών, τότε υπάρχει μοναδικό $x_1\in A_f$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$

Πως βρίσκω το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$;

Βρίσκω το Σύνολο Τιμών της f. Σε όσα διαστήματα του Συνόλου τιμών περιέχεται το μηδέν τόσες ρίζες έχει και η εξίσωση.

Πως Λύνω την εξίσωση $f(x)=0$;

Αν δεν λύνετε με γνώσεις μέχρι την Β΄ Λυκείου τότε βρίσκω προφανή ρίζα και στη συνέχεια αποδεικνύω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

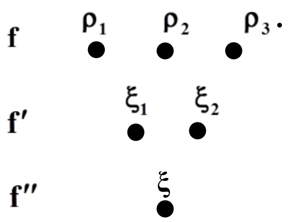
Στέλιος Μιχαήλογλου

Το πολύ κ ρίζες

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4+2x^3+6x^2=x+1$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4+2x^3+6x^2-x-1$, η οποία υποθέτουμε ότι έχει 3 διαφορετικές πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$, δηλαδή $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$.



Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με $f'(x)=4x^3+6x^2+12x-1$.

Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$, $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια ώστε, $f'(\xi_1)=0=f'(\xi_2)$. Η f' είναι συνεχής $[\xi_1,\xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) με $f''(x)=12x^2+12x+12$ Σύμφωνα με το θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=0\Leftrightarrow 12\xi^2+12\xi+12=0\Leftrightarrow \xi^2+\xi+1=0$, άτοπο, γιατί $\Delta=-3<0$. Άρα, η αρχική εξίσωση έχει το πολύ 2 ρίζες

Το πολύ 1 ρίζα

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+\dfrac{x^3}{3}=6$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Λύση

Είναι $\ln x+\dfrac{x^3}{3}=6\Leftrightarrow \ln x+\dfrac{x^3}{3}-6=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x+\dfrac{x^3}{3}-6$.

***α΄ τρόπος* (Μονοτονία)**

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, άρα και στο $[1,2]$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}+x^2>0$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει το πολύ μία ρίζα στο $(1,2)$.

***β΄ τρόπος* (Rolle – άτοπο)**

Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in(1,2)$ με $\rho_1<\rho_2$. Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $f'(x)=\dfrac{1}{x}+x^2=\dfrac{1+x^3}{3}$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$.

Οπότε, λόγω του Θ. Rolle θα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)\subseteq(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=0\Leftrightarrow \dfrac{1+\xi^3}{3}=0\Leftrightarrow \xi^3+1=0\Leftrightarrow \xi^3=-1\Leftrightarrow \xi=-1\notin(1,2)$, άτοπο.

Άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $(1,2)$.

3. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Έστω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει 2 ρίζες $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ με $\rho_1<\rho_2$. Για την f' εφαρμόζεται το θ.Rolle στο $[\rho_1,\rho_2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.
Για $x=\xi$ η σχέση $f(x)f''(x)>0$ γίνεται $f(\xi)f''(\xi)>0\Leftrightarrow 0>0$ που είναι άτοπο, άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν έχει δύο ρίζες και έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β)

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x\eta\mu x=e^x\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

Είναι $2x\eta\mu x=e^x\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow 2x\eta\mu x-e^x\sigma\upsilon\nu x=0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=2x\eta\mu x-e^x\sigma\upsilon\nu x$, η οποία είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(0)=2\cdot 0-e^0\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2}-e^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=\pi>0$,

δηλαδή $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0\Leftrightarrow 2x_0\eta\mu x_0-e^{x_0}\sigma\upsilon\nu x_0=0$, δηλαδή το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $2x\eta\mu x=e^x\sigma\upsilon\nu x$.

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $4x^3+3\kappa x^2+3\lambda=9x^2+6\kappa x+2\lambda x$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,3)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=x^4+(\kappa-3)x^3-(3\kappa+\lambda)x^2+3\lambda x$, $x\in[0,3]$ που είναι μια αρχική της f στο $[0,3]$. Η F είναι συνεχής στο $[0,3]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ με: $F'(x)=f(x)=4x^3+3(\kappa-3)x^2-2(3\kappa+\lambda)x+3\lambda$.
Είναι $F(0)=0$ και $F(3)=81+27(\kappa-3)-9(3\kappa+\lambda)+9\lambda=0$, δηλαδή $F(0)=F(3)$, οπότε, από το θ. Rolle υπάρχει: $\xi\in(0,3)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=0$
δηλαδή η εξίσωση ρίζα της εξίσωσης $4x^3+3(\kappa-3)x^2-2(3\kappa+\lambda)x+3\lambda=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,3)$.

Μοναδική ρίζα στο (α,β)

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4+x^3+20x^2-28=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4+x^3+20x^2-28$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[1,2]$.
Είναι $f(1)=-6<0$ και $f(2)=76>0$, οπότε $f(1)f(2)<0$.
Σύμφωνα με το Θ. Bolzano, θα υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$, δηλαδή x_0 ρίζα της εξίσωσης. Είναι $f'(x)=4x^3+3x^2+40x=x(4x^2+3x+40)>0$, όταν $x\in[1,2]$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$, οπότε η ρίζα x_0 που βρήκαμε προηγουμένως είναι μοναδική.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $6x^3-3x^2+5x-3=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Ύπαρξη
Έστω $f(x)=6x^3-3x^2+5x-3,\ x\in[0,1]$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

1^{ος} τρόπος
Για το λόγο αυτό εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Bolzano.
Είναι $f(0)=-3<0$ και $f(1)=5>0$. Δηλαδή $f(0)f(1)<0$, οπότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

2^{ος} τρόπος
Το ίδιο όμως θα μπορούσαμε να το αποδείξουμε και με το θ. Rolle. Θεωρούμε την αρχική συνάρτηση F της f. Είναι: $F(x)=\frac{6}{4}x^4-x^3+\frac{5}{2}x^2-3x,\ x\in[0,1]$.
Η F είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με
$F'(x)=6x^3-3x^2+5x-3=f(x)$. Επίσης $F(0)=0$ και $F(1)=\frac{6}{4}-1+\frac{5}{2}-3=0$, δηλαδή $F(0)=F(1)$, οπότε η εξίσωση $F'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

Μοναδικότητα
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,1)$.
Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in(0,1)$ με $\rho_1<\rho_2$. Τότε, επειδή η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $f'(x)=18x^2-6x+5$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$, λόγω του θ. Rolle, υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)\subseteq(0,1)$ τέτοιο, ώστε,
$f'(\xi)=0\Leftrightarrow 18\xi^2-6\xi+5=0$, που είναι αδύνατη, αφού $\Delta<0$. Άρα, η f δεν έχει δύο ρίζες στο $(0,1)$ και έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Μοναδική ρίζα

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 1 = \dfrac{x^2}{2} + x$, $x \in \mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα.

Λύση

Έστω $f(x) = e^x - 1 - \dfrac{x^2}{2} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x - x - 1$ και $f''(x) = e^x - 1$.

$f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'		↘ $+$	0	$+$ ↗	
f		↗	0	↗	

Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) < 0$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$, άρα η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = \dfrac{x^2}{2} + x$.

Πλήθος ριζών

9. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $6x^2 + 2 = x^3 + 9x$.

Λύση

Είναι $6x^2 + 2 = x^3 + 9x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Είναι $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) \ge 0 \Leftrightarrow x \le 1$ ή $x \ge 3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	
f		↗		↘		↗	

Για κάθε $x < 1$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$.

Για κάθε $x \in (1, 3)$ είναι $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$. Τέλος για κάθε $x > 3$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

Είναι $f(1) = 2$, $f(3) = -2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x - 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x - 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ με σύνολο τιμών $f(A_1) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$.

Επειδή το 0 είναι εσωτερικό του $f(A_1)$, υπάρχει μοναδικός $\rho_1 \in (-\infty, 1)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_1) = 0$.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,3]$, οπότε το σύνολο τιμών σε αυτό το διάστημα είναι: $f(A_2) = [f(3), f(1)] = [-2, 2]$.

Επειδή το το 0 είναι εσωτερικό του $f(A_2)$, θα υπάρχει μοναδικός $\rho_2 \in (-2, 2)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_2) = 0$.

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$, με σύνολο τιμών στο διάστημα αυτό

$f(A_3) = \left[f(3), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = [-2, +\infty)$.

Επειδή το 0 είναι εσωτερικό του $f(A_3)$, υπάρχει μοναδικός $\rho_3 \in (3, +\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_3) = 0$. Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

Λύση εξίσωσης

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $e^{4x} + e^x = 2$ **β)** $e^{x^3+18} - e^{2x^2+9x} = 9x - x^3 + 2x^2 - 18$

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι το $x = 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, γιατί $e^0 + e^0 = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$, ισχύει. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{4x} + e^x - 2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 4e^{4x} + e^x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η ρίζα $x = 0$ είναι μοναδική.

β) Είναι $e^{x^3+18} - e^{2x^2+9x} = 9x - x^3 + 2x^2 - 18 \Leftrightarrow e^{x^3+18} + x^3 + 18 = e^{2x^2+9x} + 2x^2 + 9x$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$f(x^3 + 18) = f(2x^2 + 9x)$ (1).

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = e^x + 1 > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και "$1-1$", οπότε από την (1) έχουμε:

$$f(x^3+18) = f(2x^2+9x) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x^3 + 18 = 2x^2 + 9x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x-2) - 9(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -3.$$