

# 5ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα 2014

Διάρκεια: 3 ώρες

## ΘΕΜΑ Α

- A1.** Εστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f'$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

μ 7

- A2.** Εστω  $f$  συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

μ 4

- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

μ 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**a)** Άνηκαν  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , τότε:  $z_1^2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 0$

**b)** Η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , έχει πάντοτε λύση στο  $\mathbb{C}$ .

**c)** Η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, αν και μόνο αν για κάθε  $x_1, x_2 \in A_f$  με  $x_1 = x_2$  είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

**d)** Άνηκαν  $f$  συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\alpha)f(\beta) > 0$ , τότε  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**e)** Άνηκαν μια συνάρτηση  $f$  εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα της μέσης τιμής, στο ίδιο διάστημα.

μ 5x2

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί  $z, w$  για τους οποίους ισχύει ότι

$$|z^3 - 3z^2 + 3z - 1| + |z^2 - 2z + 1| = 3 - |z - 1| \text{ και } z = w + iw.$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι η εικόνα  $M$  του  $z$  βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο  $K(1, 0)$  και ακτίνα 1.

μ 5

- B2.** Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα  $N$  του  $w$ .

μ 4

- B3.** Να αποδείξετε ότι  $|z^3 - 3z^2| + |z|^2 + |3z - 1| + |1 - 2z| \geq 2$ .

μ 5

- B4.** Εστω  $z_1, z_2$  δύο από τους μιγαδικούς  $z$  με  $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$  και  $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$ . Να αποδείξετε ότι  $|z_1 + z_2| = \sqrt{6}$ .

μ 5

- B5.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $OMN$  είναι ορθογώνιο.

μ 5

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση  $f$  δύο φορές παραγωγήσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f''(x) - 2f'(x) = 2xf(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 1$  και  $f'(0) = 0$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = e^{x^2}$ .

μ 5

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι:  $2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4$ .

μ 4

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή και να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .  
μ 4

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι:  $\int_1^2 e^{x^2} dx > 2e$ .

μ 3

**Γ5.** Να αποδείξετε ότι:  $\int_0^1 \left( \int_1^x f(t) dt \right) dx = \frac{1-e}{2}$ .

μ 4

**Γ6.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $\int_0^x f(t) dt - \lambda = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

μ 5

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγήσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι  $f'(x) - f(x) > 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = -1$ . Να αποδείξετε ότι:

**Δ1.**  $f(x) > -1$  για κάθε  $x > 0$  και  $f(x) < -1$  για κάθε  $x < 0$ .

μ 7

**Δ2.**  $\int_0^x f(t) dt + x \geq e^{x-x^2} - e^x$  για κάθε  $x \geq 0$ .

μ 6

**Δ3.** Υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $(2\xi^2 - 1) \int_0^\xi f(t) dt = 1 - 5\xi$ .

μ 5

**Δ4.**  $\int_{x-1}^x f(t) dt < f(x) < \int_x^{x+1} f(t) dt$ ,  $x \geq 1$ .

μ 7

**Καλή τύχη στις εξετάσεις!**

Στέλιος Μιχαήλογλου

**ΛΥΣΕΙΣ**

askisopolis

## ΘΕΜΑ Α

A1. Εστω ότι  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(\alpha, x_0]$  και  $[x_0, \beta)$ . Επομένως, για  $x_1 < x_0 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ . Άρα το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο της  $f$ . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

Πράγματι, έστω  $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$  με  $x_1 < x_2$ .

— Αν  $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$ , επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, x_0]$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

— Αν  $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ , επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[x_0, \beta)$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

— Τέλος, αν  $x_1 < x_0 < x_2$ , τότε όπως είδαμε  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ .

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ , οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ . Ομοίως, αν  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

A2. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$  ονομάζεται κάθε συνάρτηση  $F$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει  $F'(x) = f(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .

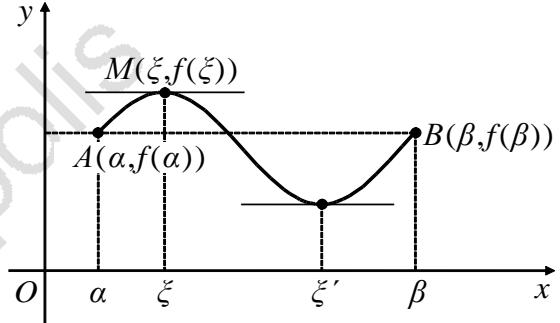
A3. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε:  $f'(\xi) = 0$ .

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε να

εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ .



A4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

$$B1. |z^3 - 3z^2 + 3z - 1| + |z^2 - 2z + 1| = 3 - |z - 1| \Leftrightarrow |(z-1)^3| + |(z-1)^2| + |z-1| - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$|z-1|^3 + |z-1|^2 + |z-1| - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(|z-1|-1)(|z-1|^2 + 2|z-1| + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$|z-1|=1 \text{ ή } |z-1|^2 + 2|z-1| + 3 = 0 \text{ που είναι αδύνατη } (\Delta < 0).$$

1	1	1	-3	$\rho = 1$
	1	2	3	
1	2	3	0	

Άρα η εικόνα  $M$  του  $z$  βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο  $K(1,0)$  και ακτίνα 1.

B2.  $z = w + iw \Leftrightarrow z = (1+i)w$ , Τότε από τη σχέση  $|z-1| = 1$ , έχουμε:

$$|(1+i)w - 1| = 1 \Leftrightarrow \left| (1+i) \left( w - \frac{1}{1+i} \right) \right| = 1 \Leftrightarrow |1+i| \left| w - \frac{1-i}{1^2 + 1^2} \right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} \left| w - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right| = 1 \Leftrightarrow \left| w - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα η εικόνα  $N$  του  $w$  βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το  $\Lambda\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  και ακτίνα  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**B3.** Είναι  $|z^3 - 3z^2| + |3z - 1| \geq |z^3 - 3z^2 + 3z - 1| = |(z-1)^3| = |z-1|^3 = 1$  και  $|z|^2 + |1-2z| = |z^2| + |1-2z| \geq |z^2 + 1-2z| = |(z-1)^2| = |z-1|^2 = 1$ , οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:  $|z^3 - 3z^2| + |z|^2 + |3z - 1| + |1-2z| \geq 2$

**B4. δ)** Εστω  $A, B$  οι εικόνες των  $z_1, z_2$  αντίστοιχα. Τότε

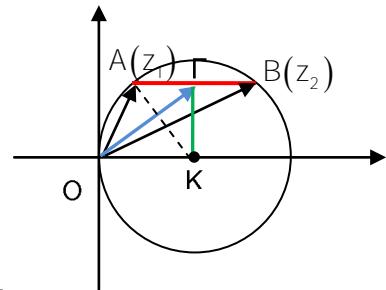
$$|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |2\overrightarrow{OG}| = 2|\overrightarrow{OG}|, \text{ όπου } G \text{ το μέσο του } AB.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $KA\Gamma$  είναι

$$(KG)^2 = (KA)^2 - (AG)^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $OK\Gamma$  είναι

$$(\Omega\Gamma)^2 = (\Omega K)^2 + (KG)^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\Omega\Gamma) = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ άρα } |z_1 + z_2| = 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$



**B5.** Εστω  $w = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Τότε

$$z = (1+i)(x+yi) = x+yi+xi-y = (x-y)+(x+y)i.$$

$$\text{Είναι } |\overrightarrow{OM}|^2 = (x-y)^2 + (x+y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}|^2 = 2x^2 + 2y^2,$$

$$|\overrightarrow{ON}|^2 = x^2 + y^2 \text{ και } |\overrightarrow{MN}|^2 = |z-w|^2 = |(x-y)+(x+y)i - x - yi| = |-y+xi| = y^2 + x^2.$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } |\overrightarrow{ON}|^2 + |\overrightarrow{MN}|^2 = 2x^2 + 2y^2 = |\overrightarrow{OM}|^2, \text{ οπότε το τρίγωνο } OMN \text{ είναι}$$

ορθογώνιο στο  $N$ .

## ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. f''(x) - 2f(x) = 2xf'(x) \Leftrightarrow f''(x) = 2xf'(x) + 2f(x) \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))' = (2xf(x))' \Leftrightarrow f'(x) = 2xf(x) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Για } x=0 \text{ είναι } f'(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0,$$

$$\text{άρα } f'(x) = 2xf(x) \Leftrightarrow f'(x) - 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} f'(x) - 2xe^{-x^2} f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^{-x^2} f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} f(x) = c_2, c_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = c_2 e^{x^2}.$$

$$\text{Όμως } f(0) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1 \text{ και } f(x) = e^{x^2}.$$

$$\Gamma 2. \text{ Είναι } f'(x) = 2xe^{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 2) \text{ άρα } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, 2].$$

$$0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq e^4 \Rightarrow \int_0^2 dx \leq \int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^2 e^4 dx \Leftrightarrow$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4$$

**Γ3.** Είναι  $f(1)=e$  και  $f'(1)=2e$ , οπότε η εφαπτομένη είναι η  $\varepsilon$ :

$$y-e=2e(x-1) \Leftrightarrow y=2ex-e$$

**Γ4.** Είναι  $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}>0 \Rightarrow f$  κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

Επειδή η  $f$  είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής, άρα  $f(x) \geq 2ex-e$ . Επειδή όμως η ισότητα δεν ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε:

$$\int_1^2 f(x) > \int_1^2 (2ex - e) dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) > [ex^2 - ex]_1^2 = 4e - 2e - e + e = 2e$$

$$\begin{aligned}\Gamma 5. \quad \int_0^1 \left( \int_1^x f(t) dt \right) dx &= \int_0^1 (x)' \left( \int_1^x f(t) dt \right) dx = \left[ x \int_1^x f(t) dt \right]_0^1 - \int_0^1 x \left( \int_1^x f(t) dt \right)' dx \Leftrightarrow \\ \int_0^1 \left( \int_1^x f(t) dt \right) dx &= - \int_0^1 xf(x) dx = - \int_0^1 xe^{x^2} dx = - \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1-e}{2}\end{aligned}$$

$$\Gamma 6. \quad \int_0^x f(t) dt - \lambda = 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = \lambda$$

Εστω  $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Είναι  $F'(x) = e^{x^2} > 0 \Rightarrow F \uparrow \mathbb{R}$ .

Είναι  $F''(x) = f'(x) = 2xe^{x^2}$ , οπότε η  $F$  είναι κυρτή στο  $[0, +\infty)$  και κοίλη στο  $(-\infty, 0]$ .

Είναι  $F(0) = 0$  και  $F'(0) = 1$ , οπότε η αφαπτομένη της  $C_F$  στο  $x=0$  είναι η  $\varepsilon$ :  $y=x$ .

Επειδή η  $F$  είναι κυρτή στο  $[0, +\infty)$  βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός βέβαια του σημείου επαφής, άρα  $F(x) \geq x$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , άρα και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .

Επειδή η  $F$  είναι κοίλη στο  $(-\infty, 0]$  βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός βέβαια του σημείου επαφής, άρα  $F(x) \leq x$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ , άρα και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$ .

Επειδή η  $F$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , το σύνολο τιμών της είναι:

$F(A) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)) = \mathbb{R}$ . Επειδή  $\lambda \in \mathbb{R}$  και η  $F$  είναι γνησίως αύξουσα, η

εξίσωση  $F(x) = \lambda$  έχει ακριβώς μίας ρίζα.

## ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \quad f'(x) - f(x) > 1 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) - e^{-x} > 0$$

Εστω  $h(x) = e^{-x}f(x) + e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Είναι  $h'(x) = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) - e^{-x} > 0 \Rightarrow h \uparrow \mathbb{R}$

Για κάθε  $x > 0$  είναι  $h(x) > h(0) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}f(x) + e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x}f(x) > -e^{-x} \Leftrightarrow f(x) > -1$

και για κάθε  $x < 0$  είναι  $h(x) < h(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) < -1$ .

$$\Delta 2. \quad \int_0^x f(t) dt + x \geq e^{x-x^2} - e^x \Leftrightarrow e^{-x} \int_0^x f(t) dt + xe^{-x} - e^{-x^2} + 1 \geq 0$$

Είναι  $f'(t) - f(t) > 1$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , οπότε  $\int_0^x f'(t) dt - \int_0^x f(t) dt > \int_0^x dt$ ,  $x > 0 \Leftrightarrow$

$$[f(t)]_0^x - \int_0^x f(t) dt > x \Leftrightarrow f(x) - f(0) > \int_0^x f(t) dt + x \Leftrightarrow f(x) - \int_0^x f(t) dt - x + 1 > 0$$

Εστω  $g(x) = e^{-x} \int_0^x f(t) dt + xe^{-x} - e^{-x^2} + 1$ ,  $x \geq 0$ .

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , η  $\int_0^x f(u) du$  είναι παραγωγίσιμη, οπότε η  $g$  είναι

παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = f(x)e^{-x} - e^{-x} \int_0^x f(t)dt + e^{-x} - xe^{-x} + 2xe^{-x^2} = e^{-x} \left( f(x) - \int_0^x f(t)dt + 1 - x \right) + 2xe^{-x^2} > 0 \Rightarrow$$

Για κάθε  $x \geq 0$  είναι  $g(x) \geq g(0) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} \int_0^x f(t)dt + xe^{-x} - e^{-x^2} + 1 \geq 0$

**Δ3.** Εστω  $\varphi(x) = (2x^2 - 1) \int_0^x f(t)dt - 1 + 5x$ ,  $x \in [0, 1]$ . Είναι  $\varphi(0) = -1 < 0$  και

$$\varphi(1) = \int_0^1 f(t)dt - 1 + 5 = \int_0^1 f(t)dt + 4$$

Επειδή  $\int_0^x f(t)dt \geq e^{x-x^2} - e^x - x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , για  $x=1$  έχουμε:

$$\int_0^1 f(t)dt \geq 1 - e - 1 = -e \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt + 4 \geq 4 - e > 0 \Rightarrow \varphi(1) > 0, \text{ δηλαδή}$$

$\varphi(0)\varphi(1) < 0$  και επειδή η  $\varphi$  είναι συνεχής, από το Θ.Β υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε

$$\varphi(\xi) = 0 \Leftrightarrow (2\xi^2 - 1) \int_0^\xi f(t)dt = 1 - 5\xi$$

**Δ4.** Εστω  $F(u) = \int_0^u f(t)dt$ . Η  $f$  είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα  $[x-1, x]$  και

$[x, x+1]$ , οπότε η  $F$  είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής στα διαστήματα αυτά.

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν  $\xi_1 \in (x-1, x)$  και  $\xi_2 \in (x, x+1)$  τέτοια, ώστε:

$$F'(\xi_1) = F(x) - F(x-1) \Leftrightarrow f(\xi_1) = \int_{x-1}^x f(t)dt \text{ και}$$

$$F'(\xi_2) = F(x+1) - F(x) \Leftrightarrow f(\xi_2) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$

Είναι  $f'(x) - f(x) > 1 \Leftrightarrow f'(x) > 1 + f(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$ , άρα  $f \uparrow [0, +\infty)$ .

$$x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1 \Leftrightarrow f(x-1) < f(\xi_1) < f(x) < f(\xi_2) < f(x+1) \Rightarrow$$

$$\int_{x-1}^x f(t)dt < f(x) < \int_x^{x+1} f(t)dt.$$