5ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα 2015

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της *f*.

10 μονάδες

Α2. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

5 μονάδες

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, τότε θα παρουσιάζει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο.

β) Αν $f(x)>0$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $\delta>0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$.

γ) Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α,β), τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο.

δ) Η συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, αν και μόνο αν για κάθε $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1=x_2$ είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

ε) Για να είναι το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ σημείο καμπής της C_f, αρκεί η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται μιγαδικός αριθμός $z\neq 0$ για τον οποίο ισχύει ότι $\left|z-|z|\right|+\left|z+|z|\right|=2|z|$.

Β1. Να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός.

7 μονάδες

Β2. Αν Α,Β οι εικόνες των μιγαδικών u,w με $w=u(1+zi)$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.

6 μονάδες

Β3. Έστω $w=\dfrac{4}{z-i}$.

i. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του w βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $K(0,2)$ και ακτίνα 2.

6 μονάδες

ii. Αν w_1,w_2 δύο από τους μιγαδικούς w του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{5}\le\left|\dfrac{w_1-3-2i}{w_2-3-2i}\right|\le 5$.

6 μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός $z(x)=f(x)+\left(\int_0^x f(t)dt\right)\cdot i, x\in\mathbb{R}$.

Αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στην ευθεία $x+y-1=0$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^{-x}$.

6 μονάδες

Γ2. Να δείξετε ότι $|z(x)|\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6 μονάδες

Γ3. Να υπολογίσετε το $\int_0^1\left(x\cdot \mathrm{Im}(z(x))\right)dx$.

6 μονάδες

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)\left(x^4+x^2+1\right)=\left(x^3+2x\right)e^{-x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

7 μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(-2,+\infty)$ με

- $x\cdot\int_0^1 f(\mathrm{xt})dt-\int_0^x\frac{1}{t+2}dt=x-e^{-x}, \mathrm{x}>-2$.
- $g(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{x+3}{x+2}+e^{-x}, x>-2$

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot g(x)}{(e^x-1)\cdot \eta\mu x}$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_x^{x+1}f(t)dt=\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt$ είναι αδύνατη.

. Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε το $\int_0^1 g(x)\mathrm{dx}$

Μονάδες 5

Κάθε Επιτυχία στις Πανελλαδικές εξετάσεις!

Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$.(2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,\beta),$$

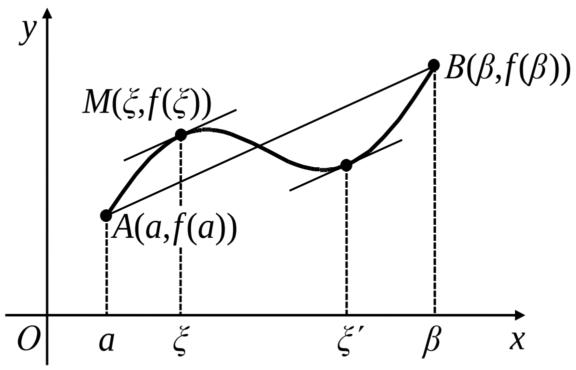
που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

Α3. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\left|z-|z|\right|+\left|z+|z|\right|=2|z|\Leftrightarrow\left(\left|z-|z|\right|+\left|z+|z|\right|\right)^2=\left(2|z|\right)^2\Leftrightarrow$

$$\left|z-|z|\right|^2+\left|z+|z|\right|^2+2\left|z-|z|\right|\left|z+|z|\right|=4|z|^2\Leftrightarrow$$

$$\left(z-|z|\right)\left(\bar z-|\bar z|\right)+\left(z+|z|\right)\left(\bar z+|\bar z|\right)+2\left|z^2-|z|^2\right|=4|z|^2\Leftrightarrow$$

$$z\bar z-z|\bar z|-\bar z|z|+|z||\bar z|+z\bar z+z|\bar z|+\bar z|z|+|z||\bar z|+2\left|z^2-|z|^2\right|=4|z|^2\overset{|z|=|\bar z|}{\Rightarrow}$$

$$|z|^2-z\cdot|z|-\bar z|z|+|z|^2+|z|^2+z|z|+\bar z|z|+|z|^2+2\left|z^2-|z|^2\right|=4|z|^2\Leftrightarrow$$

$$2\left|z^2-|z|^2\right|=0\Leftrightarrow z^2-|z|^2=0\Leftrightarrow z^2-z\bar z=0\Leftrightarrow$$

$z\left(z-\bar z\right)=0\Leftrightarrow z=0$, που είναι αδύνατο ή $z=\bar z\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

Β2. $\left|\overrightarrow{OA}\right|=|u|$, $\left|\overrightarrow{OB}\right|=|w|=\left|u(1+zi)\right|=|u|\sqrt{1+z^2}$ και

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=|u-w|=\left|u-u(1+zi)\right|=|z||u|$$

Επειδή $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2$ το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Α.

Β3. i. α΄ τρόπος

$w=\frac{4}{z-i}=\frac{4z}{z^2+1}+\frac{4}{z^2+1}i$. Αν $w=x+yi$, τότε:

$x=\frac{4z}{z^2+1}$, $y=\frac{4}{z^2+1}\Leftrightarrow z^2+1=\frac{4}{y}$ (1)

και $x=\frac{4z}{\frac{4}{y}}=zy\Leftrightarrow z=\frac{x}{y}$. Τότε $(1)\Rightarrow x^2+y^2=4y\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4$, δηλαδή η εικόνα του w βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $K(0,2)$ και ακτίνα 2.

β΄ τρόπος

$w=\frac{4}{z-i}\Leftrightarrow wz-iw=4\Leftrightarrow wz=iw+4\Leftrightarrow z=\frac{iw+4}{w}$

$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{iw+4}{w}=\frac{-i\bar{w}+4}{\bar{w}}\Leftrightarrow iw\bar{w}+4\bar{w}=-iw\bar{w}+4w\Leftrightarrow 2i|w|^2-4(w-\bar{w})=0\Leftrightarrow$

$i(x^2+y^2)-2\cdot 2yi=0\Leftrightarrow x^2+y^2-4y=0\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4$

ii. Επειδή η εικόνα του w βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $K(0,2)$ και ακτίνα 2, ισχύει ότι $|w-2i|=2$

Είναι $||w-2i|-3|\le|w-3-2i|\le|w-2i|+3\Leftrightarrow 1\le|w-3-2i|\le 5$, άρα

$1\le|w_1-3-2i|\le 5$ και $1\le|w_2-3-2i|\le 5\Leftrightarrow\frac{1}{5}\le\frac{1}{|w_2-3-2i|}\le 1$, οπότε και

$1\cdot\frac{1}{5}\le|w_1-3-2i|\frac{1}{|w_2-3-2i|}\le 5\cdot 1\Leftrightarrow\frac{1}{5}\le\frac{|w_1-3-2i|}{|w_2-3-2i|}\le 5\Leftrightarrow\frac{1}{5}\le\left|\frac{w_1-3-2i}{w_2-3-2i}\right|\le 5$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στην ευθεία $x+y-1=0$ οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν οπότε

$f(x)+\int_0^x f(t)dt-1=0\overset{(\cdot e^x)}{\Leftrightarrow}e^x\cdot f(x)+e^x\cdot\int_0^x f(t)dt-e^x=0\Leftrightarrow$

$\left(e^x\cdot\int_0^x f(t)dt-e^x\right)'=0\Leftrightarrow e^x\cdot\int_0^x f(t)dt-e^x=c, c\in\mathbb{R}$. (1)

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}c=-1$ και $e^x\cdot\int_0^x f(t)dt=e^x-1\overset{(\cdot e^{-x})}{\Leftrightarrow}\int_0^x f(t)dt=1-e^{-x}$ (2) .

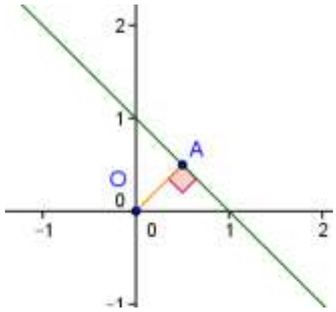
Η συνάρτηση f είναι συνεχής οπότε η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Παραγωγίζουμε τη σχέση (2) και έχουμε $f(x)=e^{-x}$

Γ2. Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι :

$$|z(x)|_{\min} = (OA) = d(O,\varepsilon) = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $|z(x)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$



2ος τρόπος

Επειδή $f(x)=e^{-x}$, είναι $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x}+1$, οπότε

$z(x) = e^{-x} + \left(1-e^{-x}\right)\cdot i$

Είναι $|z(x)| = \sqrt{\left(e^{-x}\right)^2 + \left(1-e^{-x}\right)^2} = \sqrt{e^{-2x}+1-2e^{-x}+e^{-2x}} = \sqrt{2e^{-2x}-2e^{-x}+1},\ x\in\mathbb{R}$

Έστω $g(x) = \sqrt{2e^{-2x}-2e^{-x}+1},\ x\in\mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = \frac{-4e^{-2x}+2e^{-x}}{2\sqrt{2e^{-2x}-2e^{-x}+1}} = \frac{\cancel{2}e^{-x}\left(1-2e^{-x}\right)}{\cancel{2}\sqrt{2e^{-2x}-2e^{-x}+1}}$

$g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}e^{-x}\left(1-2e^{-x}\right)}{\cancel{2}\sqrt{2e^{-2x}-2e^{-x}+1}} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(1-2e^{-x}\right)\geq 0 \overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}$

$1-2e^{-x}\geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow\ -x\leq \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \Leftrightarrow x\geq \ln 2$.

Για κάθε $x<\ln 2$ είναι $g'(x)<0 \Rightarrow g \searrow (-\infty,\ln 2]$ και

για κάθε $x>\ln 2$ είναι $g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow [\ln 2,+\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το

$g(\ln 2) = \sqrt{2e^{-2\ln 2}-2e^{-\ln 2}+1} = \sqrt{2e^{\ln 2^{-2}}-2e^{\ln 2^{-1}}+1} = \sqrt{2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα

$g(x)\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |z(x)|\geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Γ3. $\mathrm{Im}(z) = \int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1-e^{-x}$

$$\int_0^1 \left(\mathrm{x}\cdot \mathrm{Im}(z(x))\right)dx = \int_0^1 \mathrm{x}\cdot(1-e^{-x})dx = \int_0^1\left(\mathrm{x}-xe^{-x}\right)dx = \int_0^1 \mathrm{x}\,dx - \int_0^1 xe^{-x}dx = .$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 x\left(e^{-x}\right)'dx = \frac{1}{2}+\left[xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}dx = \frac{1}{2}+e^{-1}+\left[e^{-x}\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}-1 = \frac{2}{e}-\frac{1}{2} = \frac{4-e}{2e}.$$

Γ4. $f(x)\left(x^4+x^2+1\right) = \left(x^3+2x\right)e^{-x} \Leftrightarrow \cancel{e^{-x}}\left(x^4+x^2+1\right) = \left(x^3+2x\right)\cancel{e^{-x}} \Leftrightarrow$

$x^4+x^2+1 = x^3+2x \Leftrightarrow x^4-x^3+x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)\left(x^3+x-1\right)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x^3+x-1=0$

1	-1	1	-2	1	ρ = 1
	1	0	1	-1	
1	0	1	-1	0	

Έστω $h(x)=x^3+x-1,\ x\in[0,1]$.

Είναι $h(0)=-1,\ h(1)=1$ δηλαδή $h(0)h(1)<0$

και επειδή η h είναι συνεχής, υπάρχει $\rho\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$h(\rho)=0\Leftrightarrow \rho^3+\rho-1=0\Leftrightarrow(\rho-1)(\rho^3+\rho-1)=0\Leftrightarrow \rho^4-\rho^3+\rho^2-2\rho+1=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $x\cdot\int_0^1 f(\mathrm{xt})dt-\int_0^x\frac{1}{t+2}dt=x-e^{-x}(1)$

Θέτουμε $u=xt$ οπότε $du=xdt$. Για $x=0:u=0$ και για $x=1:u=x$

$$(1)\Rightarrow\int_0^x f(u)du-\int_0^x\frac{1}{t+2}dt=x+e^{-x}\,(2)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-2,+\infty)$ οπότε η συνάρτηση

$g(x)=\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $g'(x)=f(x)$.

Η συνάρτηση $\frac{1}{t+2}$ είναι συνεχής σαν ρητή συνάρτηση οπότε η συνάρτηση

$\int_0^x\frac{1}{t+2}dt$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $\int_0^x\frac{1}{t+2}dt=\frac{1}{x+2}$.

Η συνάρτηση $x+e^{-x}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $\left(x-e^{-x}\right)'=1+e^{-x}$.

$$(2)\Rightarrow f(x)-\frac{1}{x+2}=1+e^{-x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x+2}+1+e^{-x}=\frac{1+x+2}{x+2}+e^{-x}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{x+3}{x+2}+e^{-x}.$$

Δ2. $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\left(\frac{x+3}{x+2}+e^{-x}\right)=1\cdot(+\infty)+e^2=+\infty$.

Άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=-2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}-e^{-x}\right)=1-0=1$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=1$.

Δ3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{e^x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{g'(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{e^x}=\frac{f(0)}{1}=\frac{5}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot g(x)}{(e^x-1)\cdot\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{(e^x-1)}\cdot\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{5}{2}\cdot1=\frac{5}{2}$$

Δ4. Για την συνάρτηση g ισχύουν οι υποθέσεις του ΘΜΤ στα $[x,x+1],[x+1,x+2]$,

με $\mathrm{x}>-2$. Οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\mathrm{x},\mathrm{x}+1)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_1)=\frac{g(\mathrm{x}+1)-\mathrm{g}(\mathrm{x})}{\cancel{x}+1-\cancel{x}}=g(\mathrm{x}+1)-\mathrm{g}(\mathrm{x})=\int_0^{x+1}f(t)dt-\int_0^{x}f(t)dt=\int_x^{x+1}f(t)dt$$

και $\xi_2\in(\mathrm{x}+1,\mathrm{x}+2)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_2)=\frac{g(\mathrm{x}+2)-\mathrm{g}(\mathrm{x}+1)}{\cancel{x}+2-\cancel{x}-1}=g(\mathrm{x}+2)-\mathrm{g}(\mathrm{x}+1)=\int_0^{x+2}f(t)dt-\int_0^{x+1}f(t)dt=\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt$$

$$g''(x)=f'(x)=\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}-3}{(x+2)^2}-e^{-x}=\frac{-1}{(x+2)^2}-e^{-x}<0\Rightarrow g' \text{ γνησίως φθίνουσα,}$$

οπότε η g' είναι και $1-1$.

Είναι $\int_x^{x+1}f(t)dt=\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt\Leftrightarrow g'(\xi_1)=g'(\xi_2)\overset{g'1-1}{\Leftrightarrow}\xi_1=\xi_2$ άτοπο.

Δ5. $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{dx}=\int_0^1 x'\cdot g(x)\,\mathrm{dx}=\left[x\cdot g(x)\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot g'(x)\,\mathrm{dx}=g(1)-\int_0^1 x\cdot f(x)\,\mathrm{dx}=$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}-\int_0^1 x\cdot f(x)\,\mathrm{dx}=\int_0^1(1-x)\cdot f(x)\,\mathrm{dx}=\int_0^1(1-x)\cdot\left(\frac{x+3}{x+2}+e^{-x}\right)\mathrm{dx}=$$

$$\int_0^1\left[\frac{(1-x)(\mathrm{x}+3)}{x+2}+(1-x)e^{-x}\right]\mathrm{dx}=\int_0^1\frac{(1-x)(\mathrm{x}+3)}{x+2}\,\mathrm{dx}+\int_0^1(1-x)e^{-x}\,\mathrm{dx}=$$

$$\int_0^1\left(-x+\frac{3}{x+2}\right)\mathrm{dx}+\int_0^1(1-x)\left(-e^{-x}\right)'\mathrm{dx}=\left[-\frac{x^2}{2}+3\ln|x+2|\right]_0^1+\left[-e^{-x}(1-x)\right]_0^1-\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{dx}=$$

$$-\frac{1}{2}+3\ln 3-3\ln 2+1+\left[e^{-x}\right]_0^1=\frac{1}{2}+3\ln\frac{3}{2}+e^{-1}-1=3\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{e}-\frac{1}{2}.$$