



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ
8ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά «Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»
Σάββατο 16 Ιανουαρίου 2016

Α' Γυμνασίου

Θέμα 1°

Αν $x + y = 6 \cdot 2015 + [(4 + 2) : 2 - 6 : (2^2 - 1)]^{10} - 6 \cdot 2014$ και $y - \omega = \frac{46}{16} \cdot \frac{2}{23} + \frac{11}{6} - \frac{1}{8} : \frac{3}{2}$

α) Να δειχθεί ότι ο αριθμός: $x + 2 \cdot y - \omega + 2$ είναι πρώτος.

β) Μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται ο αριθμός: $K = A + \frac{B}{5}$ όπου $A = x + y$ και $B = y - \omega$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $x + y = 6 \cdot 2015 + [(4 + 2) : 2 - 6 : (2^2 - 1)]^{10} - 6 \cdot 2014$

$x + y = 6 \cdot (2015 - 2014) + [6 : 2 - 6 : 3]^{10}$

$x + y = 6 \cdot 1 + (3 - 2)^{10}$

$x + y = 6 + 1^{10}$

$x + y = 6 + 1$

$x + y = 7$

$y - \omega = \frac{\cancel{46}^2}{\cancel{16}_8} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{23}} + \frac{11}{6} - \frac{1}{\cancel{8}} \cdot \frac{3}{2}$

$y - \omega = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{1} + \frac{11}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3}$

$y - \omega = \frac{1}{4} + \frac{11}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$

$y - \omega = \frac{3}{12} + \frac{22}{12} - \frac{1}{12}$

$y - \omega = \frac{24}{12}$

$y - \omega = 2$

Επομένως $x + 2 \cdot y - \omega + 2 = x + y + y - \omega + 2 = (x + y) + (y - \omega) + 2 = 7 + 2 + 2 = 11$, ο οποίος είναι πρώτος.

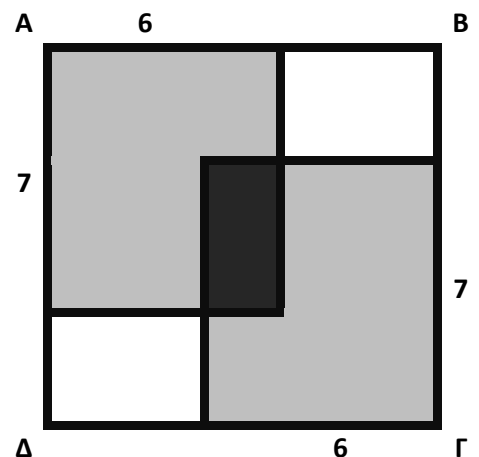
β) $K = A + \frac{B}{2} = 7 + \frac{2}{5} = \frac{37}{5} = 7,4$, επομένως ο αριθμός K βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 7 και 8.

Θέμα 2°

Δύο ίδια φύλλα χαρτιού με πλευρές 6 εκ. και 7 εκ. τοποθετούνται στις γωνίες του τετραγώνου **ΑΒΓΔ** πλευράς 10 εκ. Τα δύο φύλλα επικαλύπτονται, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Πόσο είναι το εμβαδό και πόση η περίμετρος της επικαλυπτόμενης περιοχής;

β) Πόσο είναι το εμβαδό της υπόλοιπης περιοχής;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για το μήκος της επικαλυπτόμενης περιοχής: $6 - (10 - 6) = 6 - 4 = 2$ εκ

Για το πλάτος της επικαλυπτόμενης περιοχής: $7 - (10 - 7) = 7 - 3 = 4$ εκ

Επομένως, $E_{\text{καλυπτ}} = 2 \cdot 4 = 8$ τετρ. εκ και $\Pi_{\text{καλυπτ}} = 2 + 2 + 4 + 4 = 12$ εκ

β) $E_{\text{υπολ.}} = E_{\text{τετρ}} - E_{\text{καλυπτ}} = 10^2 - 8 = 100 - 8 = 92$ τετρ. εκ

Θέμα 3°

Δίνεται η πράξη $\alpha \# \beta = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha \cdot \beta$, όπου α, β φυσικοί αριθμοί.

α) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων i) $8 \# 12$ και ii) $(2 \# 3) \# (4 \# 5)$

β) Να υπολογιστεί η τιμή του α όταν ο φυσικός αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του 5 και $\alpha \# 5 = 75$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) i) $8 \# 12 = 8^2 + 12^2 - 8 \cdot 12 = 64 + 144 - 96 = 112$ και **ii)** $2 \# 3 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 = 4 + 9 - 6 = 7$ ενώ $4 \# 5 = 4^2 + 5^2 - 4 \cdot 5 = 16 + 25 - 20 = 21$. Άρα, $(2 \# 3) \# (4 \# 5) = 7^2 + 21^2 - 7 \cdot 21 = 49 + 441 - 147 = 343$

β) Είναι $\alpha = 10$, γιατί το 10 είναι πολλαπλάσιο του 5 και $10 \# 5 = 10^2 + 5^2 - 10 \cdot 5 = 100 + 25 - 50 = 75$

Θέμα 4°

Δίνεται ο αριθμός **A=12233344445555...1515...15**, όπου κάθε αριθμός εμφανίζεται τόσες φορές όσες είναι η τιμή του στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (το **1** μία φορά, το **2** δύο φορές, το **3** τρεις φορές, κ.τ.λ. και τέλος το **15** δεκαπέντε φορές)

α) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων που χρειαζόμαστε για να γράψουμε τον αριθμό **A**

β) Ποιο ψηφίο βρίσκεται στην 100^n θέση;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Το πλήθος των ψηφίων είναι: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 = (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5 + (20 + 30) + (22 + 28) + (24 + 26) = 4 \cdot 10 + 5 + 3 \cdot 50 = 40 + 5 + 150 = 195$

β) Μετρώντας βρίσκουμε ότι:

Ο αριθμός 1 βρίσκεται στην 1η θέση

Ο αριθμός 2 βρίσκεται στις θέσεις 2 – 3

Ο αριθμός 3 βρίσκεται στις θέσεις 4 – 6

Ο αριθμός 4 βρίσκεται στις θέσεις 7 – 10

Ο αριθμός 5 βρίσκεται στις θέσεις 11 – 15

Ο αριθμός 6 βρίσκεται στις θέσεις 16 – 21

Ο αριθμός 7 βρίσκεται στις θέσεις 22 – 28

Ο αριθμός 8 βρίσκεται στις θέσεις 29 – 36

Ο αριθμός 9 βρίσκεται στις θέσεις 37 – 45

Ο αριθμός 10 βρίσκεται στις θέσεις 46 – 65 (10 διψήφιοι, δηλαδή 20 ψηφία)

Ο αριθμός 11 βρίσκεται στις θέσεις 66 – 87 (11 διψήφιοι, δηλαδή 22 ψηφία)

Ο αριθμός 12 βρίσκεται στις θέσεις 88 – 111 (12 διψήφιοι, δηλαδή 24 ψηφία)

Γράφοντας 12 φορές τον αριθμό 12, στις άρτιου πλήθους θέσεις 88, 90, 92, ..., 110 βρίσκεται το ψηφίο 1, ενώ το 2 βρίσκεται στις περιττού πλήθους θέσεις.

Επομένως στην 100^n θέση βρίσκεται το ψηφίο 1.