Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου
Ύλη: Από Θεωρήματα Συνέχειας έως και Συνέπειες ΘΜΤ

Θέμα Α

Α1. Να δώσετε 2 αντιπαραδείγματα, είτε με συγκεκριμένη συνάρτηση είτε με γραφική παράσταση στα οποία να φαίνεται αν ισχύει το αντίστροφο των θεωρημάτων:
α) Bolzano **β)** Rolle

μ 2x5

Α2. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}-\{x_0\}$ και παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα με $f'(x)=0$. Τι συμπεραίνετε για την f; Δώστε παράδειγμα.

μ 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $(\alpha,\beta]$,τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή.

γ) Αν μια συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα, τότε και το πεδίο ορισμού της είναι κλειστό διάστημα.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο (α,β), τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$.

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

στ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και άρτια στο R τότε η f' είναι περιττή.

ζ) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f',υπάρχει το πολύ μία ρίζα της f.

η) Δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα για μια συνάρτηση f όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και του θεωρήματος Rolle.

θ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)$.

ι) Αν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f+g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

μ 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^7+x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα. μ 4

Β2.Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=5x-2$ τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$. μ 5

Β3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}. μ 3

Β4. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι η ευθεία ε: $y=\frac{1}{8}x+\frac{5}{8}$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_1=3$. μ 5

Β5. Υλικό σημείο Μ κινείται επί της ε και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 8cm/sec. Να βρείτε:

α) Την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο $K(3,1)$. μ 4

β) Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που σχηματίζεται από το σημείο Μ, τις προβολές του σημείου Μ στους άξονες και την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο Κ. μ 4

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f(1)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f' αντιστρέφεται. μ 5

Γ2. Η γραφική παράσταση της f δέχεται ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη. μ 5

Γ3. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ 2 ρίζες. μ 5

Γ4. Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)+(2\xi-1)f(\xi)=0$. μ 5

Γ5. Υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$. μ 5

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)f(x)-e^{-x}\left(f(x)-f'(x)\right)-e^{-2x}=0$ και $f(0)=2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=3-e^{-x}$. μ 6

Δ2. Να εξετάσετε αν υπάρχει διάστημα της μορφής $[\gamma,\delta]$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle. μ 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $e^{-\beta}(\beta-\alpha)\leq e^{-\alpha}-e^{-\beta}\leq e^{-\alpha}(\beta-\alpha)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. μ 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{-1}-e^{-x}}{x-1}=\dfrac{1}{e}$. μ 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $f\left(f(x_0)\right)=\dfrac{3e-1}{e}$. μ 6

Καλή Επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου

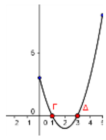
Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Λύσεις

Θέμα Α

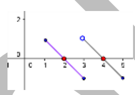
Α1. α) Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$ είναι συνεχής στο $[0,5]$
έχει δύο ρίζες στο διάστημα αυτό, τις $x=1$ και $x=3$, όμως
$f(0)f(5)=24>0$



Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x+2, & 1\le x<3\\ -x+4, & 3\le x\le 5\end{cases}$ έχει 2 ρίζες στο $[1,5]$
τις 2 και 4, είναι $f(1)f(5)<0$ όμως δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.



β) Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & x\in\left[-1,\frac{1}{4}\right)\\ x-\frac{1}{4}, & x\in\left[\frac{1}{4},1\right]\end{cases}$, παρατηρούμε ότι:

- Δεν είναι συνεχής στο $[-1,1]$
- Δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$
- $f(-1)=1\neq\frac{3}{4}=f(1)$

Όμως στο $x_0=0$ ισχύει: $f'(0)=0$

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$ είναι συνεχής στο $[1,4]$ παραγωγίσιμη στο $(1,4)$
$f(1)=0\neq f(4)=3$, όμως $f'(\xi)=0\Leftrightarrow 2\xi-4=0\Leftrightarrow\xi=2$

Α2. Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ είναι $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, όμως η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, όπως διαπιστώνουμε και στο διπλανό σχήμα.

Α3. α) Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Σ **ζ)** Σ **η)** Σ **θ)** Λ **ι)** Λ

Θέμα Β

Β1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^7<x_2^7$ και με πρόσθεση κατά μέλη είναι $x_1^7+x_1<x_2^7+x_2\Leftrightarrow$
$x_1^7+x_1+1<x_2^7+x_2+1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^7+x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^7=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^7+x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^7=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\mathbb{R}$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών και η f είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικός $\rho\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(\rho)=0$.

B2. Αρκεί η εξίσωση $f(x)=5x-2\Leftrightarrow x^7+x+1-5x+2=0\Leftrightarrow x^7-4x+3=0$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. Έστω $g(x)=x^7-4x+3,\ x\in[0,1]$. Παρατηρούμε ότι $g(1)=0$, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano για τη g στο $[0,1]$ και γι αυτό παραγοντοποιούμε τη g.

Με βάση το διπλανό σχήμα Horner είναι

$$g(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x-3)$$

1	0	0	0	0	0	-4	3	$\rho=1$
	1	1	1	1	1	1	-3	
1	1	1	1	1	1	-3	0	

Έστω $h(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x-3,\ x\in[0,1]$.

Είναι $h(0)=-3,\ h(1)=3$, δηλαδή $h(0)h(1)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική, λόγω του Θ.Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο,. ώστε $h(x_0)=0$. Είναι $g(x)=(x-1)h(x)$ και $g(x_0)=(x_0-1)\overset{0}{\cancel{h(x_0)}}=0$.

B3. $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow 1-1\Rightarrow$ αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, άρα $A_{f^{-1}}=f(A)=\mathbb{R}$.

B4. Έστω ότι $f^{-1}(3)=a$ τότε $f(f^{-1}(3))=f(a)\Leftrightarrow f(a)=3\Leftrightarrow f(a)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}a=1$, δηλαδή $f^{-1}(3)=1$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^{-1}(f(x))=x\Rightarrow\left[f^{-1}(x^7+x+1)\right]'=(x)'\Leftrightarrow(f^{-1})'(x^7+x+1)\cdot(x^7+x+1)'=1\Leftrightarrow$

$(f^{-1})'(x^7+x+1)\cdot(7x^6+1)=1$ και για $x=1$ είναι $(f^{-1})'(3)\cdot 8=1\Leftrightarrow(f^{-1})'(3)=\frac{1}{8}$.

Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_1=3$ έχει εξίσωση:

$$y-f^{-1}(3)=(f^{-1})'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{8}(x-3)\Leftrightarrow y=\frac{1}{8}x-\frac{3}{8}+1\Leftrightarrow y=\frac{1}{8}x+\frac{5}{8}$$

B5. Έστω $M(x(t),y(t))$, τότε $y(t)=\frac{1}{8}x(t)+\frac{5}{8}$ με $x'(t)=8cm/sec$.

α) Είναι $(OM)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{x^2(t)+\left(\frac{1}{8}x(t)+\frac{5}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{65}{64}x^2(t)+\frac{10}{64}x(t)+\frac{25}{64}}\Leftrightarrow$

$$d=(OM)=\sqrt{\frac{5}{64}(13x^2(t)+2x(t)+5)}=\frac{1}{8}\sqrt{5(13x^2(t)+2x(t)+5)}$$

Είναι $d(t)=\frac{1}{8}\sqrt{5(x^2(t)+2x(t)+5)},\ t\geq 0$.

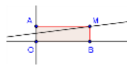
$$d'(t)=\frac{5}{16}\frac{2x(t)x'(t)+2x'(t)}{2\cdot\sqrt{5(x^2(t)+2x(t)+5)}}=\frac{5x'(t)(x(t)+1)}{8\cdot\sqrt{5(x^2(t)+2x(t)+5)}}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x(t_0)=3$ και $y(t_0)=1$, είναι:

$$d'(t_0)=\frac{5x'(t_0)(x(t_0)+1)}{8\cdot\sqrt{5(x^2(t_0)+2x(t_0)+5)}}=\frac{\overset{5}{\cancel{40}}(3+1)}{\cancel{8}\sqrt{5(3^2+6+5)}}=\frac{20}{\sqrt{100}}=\frac{20}{10}=2\text{ cm/sec}$$

β) Το ορθογώνιο ΟΑΜΒ έχει εμβαδό

$$E=(OA)(OB)=y(t)x(t)=\left(\frac{1}{8}x(t)+\frac{5}{8}\right)x(t)=\frac{1}{8}x^2(t)+\frac{5}{8}x(t)$$



Είναι $E(t)=\frac{1}{8}x^2(t)+\frac{5}{8}x(t),\ t\ge 0$ με

$E'(t)=\frac{1}{\cancel{8}^4}\cancel{2}x(t)x'(t)+\frac{5}{8}x'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$E'(t_0)=\frac{1}{4}x(t_0)x'(t_0)+\frac{5}{8}x'(t_0)=\frac{1}{4}\cdot 3\cdot 8+\frac{5}{8}\cdot 8=11cm^2/sec$

Θέμα Γ

Γ1. Έστω ότι η f' δεν αντιστρέφεται. Τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ τέτοια ώστε $f'(\alpha)=f'(\beta)$. Λόγω του θεωρήματος Rolle για την f' η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β) που είναι άτοπο. Άρα η f' αντιστρέφεται.

Γ2. Επειδή $f(0)=f(1)$ λόγω του θεωρήματος Rolle για την f υπάρχει $\xi_1\in(0,1): f'(\xi_1)=0$
Επειδή η f' αντιστρέφεται είναι 1-1, οπότε το ξ_1 είναι μοναδικό.

Γ3. Αν η f είχε τρείς ρίζες τότε από το Θ.R η f' θα έχει τουλάχιστον δύο ρίζες και η f'' τουλάχιστον μία ρίζα, που είναι άτοπο.

Γ4. $f'(x)+(2x-1)f(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2-x}f'(x)+(2x-1)e^{x^2-x}f(x)=0$

Έστω $g(x)=e^{x^2-x}f(x),\ x\in[0,1]$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $g'(x)=e^{x^2-x}f'(x)+(2x-1)e^{x^2-x}f(x)$.

Επειδή $g(0)=f(0)=f(1)=g(1)$, λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$g'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi^2-\xi}f'(\xi)+(2\xi-1)e^{\xi^2-\xi}f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)+(2\xi-1)f(\xi)=0$

Γ5. Επειδή η f είναι συνεχής υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Άρα $m\le f\left(\frac{1}{3}\right)\le M,\ m\le f(0,2)\le M,\ m\le f\left(\frac{1}{e}\right)\le M$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$3m\le f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)\le 3M\Leftrightarrow m\le\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}\le M.$$

Επειδή ο αριθμός $\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f, υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}.$$

Θέμα Δ

Δ1. $f'(x)f(x)-e^{-x}\left(f(x)-f'(x)\right)-e^{-2x}=0\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)-2\left(e^{-x}f(x)-e^{-x}f'(x)\right)-2e^{-2x}=0\Leftrightarrow$

$\left(f^2(x)+2f(x)e^{-x}+e^{-2x}\right)'=0\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)e^{-x}+e^{-2x}=c\Leftrightarrow\left(f(x)+e^{-x}\right)^2=c$

Για $x=0$ είναι $\left(f(0)+1\right)^2=c\Leftrightarrow c=9$ άρα $\left(f(x)+e^{-x}\right)^2=9$ (1)

Έστω $g(x)=f(x)+e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$. Επειδή $g^2(x)=9\ne 0$ είναι $g(x)\ne 0$ και επειδή είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(0)=3>0$ άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται:

$g(x)=3\Leftrightarrow f(x)+e^{-x}=3\Leftrightarrow f(x)=3-e^{-x}$.

Δ2. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι και 1-1, οπότε δεν υπάρχουν $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ με $\gamma<\delta$ τέτοια, ώστε $f(\gamma)=f(\delta)$. Άρα δεν υπάρχει διάστημα $[\gamma,\delta]$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

Δ3. Αν $\alpha=\beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$ τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x)=e^{-x}$, λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{-\xi}=\dfrac{\cancel{\beta}-e^{-\beta}-\cancel{\beta}+e^{-\alpha}}{\beta-\alpha}=\dfrac{e^{-\alpha}-e^{-\beta}}{\beta-\alpha}$.

Είναι $\alpha<\xi<\beta\Leftrightarrow-\alpha>-\xi>-\beta\Leftrightarrow e^{-\beta}<e^{-\xi}<e^{-\alpha}\Leftrightarrow e^{-\beta}<\dfrac{e^{-\alpha}-e^{-\beta}}{\beta-\alpha}<e^{-\alpha}\Leftrightarrow$

$e^{-\beta}(\beta-\alpha)<e^{-\alpha}-e^{-\beta}<e^{-\alpha}(\beta-\alpha)$.

Όμοια αν $\alpha>\beta$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-e^{-x}+e^{-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-e^{-x}-\left(3-e^{-1}\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

Δ5. $f(f(x_0))=\dfrac{3e-1}{e}=3-e^{-1}\Leftrightarrow f(f(x_0))=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(x_0)=1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-e^{-x}\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-e^{-x}\right)=3$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,3)$.

Επειδή $1\in f(A)$ και $f\nearrow\mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=1$.