Γ ΤΑΞΗ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
1^0-3^0-4^0-5^0-6^0 ΓΕΛ ΑΙΓΑΛΕΩ
ΚΥΡΙΑΚΗ 3 ΜΑΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

(Α1) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}'(x_0)=0$ **(Μονάδες 7)**

(Α2) Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού **(Μονάδες 5)**

(Α3) Πότε η ευθεία $\mathrm{y}=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$; **(Μονάδες 3)**

(Α4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ' ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

(α) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δυο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους **(Μονάδες 2)**

(β) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $\mathrm{f}\circ g$ και $g\circ\mathrm{f}$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες **(Μονάδες 2)**

(γ) Αν η συνάρτηση $g+\mathrm{f}$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο Δ **(Μονάδες 2)**

(δ) Όταν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ,τότε κατ'ανάγκη θα ισχύει $\mathrm{f}''(x)>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x **(Μονάδες 2)**

(ε) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ τότε $\left(\int_\alpha^x \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}\right)'=\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(\alpha)$ **(Μονάδες 2)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w και ο πραγματικός αριθμός κ για τους οποίους ισχύουν

- Οι z, w δεν είναι πραγματικοί αριθμοί **(1)**
- $z \neq w$ και $z \neq \overline{w}$ **(2)**
- $|z| = |w| = 1$ **(3)**
- $w = \dfrac{z+\kappa}{\kappa z+1}$ **(4)**

(Β1) Να αποδείξετε ότι: $\kappa = \dfrac{z-w}{wz-1}$ **(Μονάδες 5)**

(Β2) Να αποδείξετε ότι $\kappa \neq 1$ και $\kappa \neq -1$ **(Μονάδες 6)**

(Β3) Αν $|\kappa| > 1$ και $\mathrm{Im}(z), \mathrm{Im}(w)$ το φανταστικό μέρος των μιγαδικών z, w αντίστοιχα , τότε να αποδείξετε ότι:

(Β3α) $\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w) < 0$. **(Μονάδες 7)**

(Β3β) Η εξίσωση: $(\ln(x+1))\,\mathrm{Im}(z) + (1-e^{x-1})\,\mathrm{Im}(w) = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα ως προς x στο $(0,1)$ **(Μονάδες 4)**

(Β4) Έστω z, w, οι μιγαδικοί των προηγούμενων ερωτημάτων και u_1, u_2, u_3 οι μιγαδικοί u οι οποίοι επαληθεύουν την σχέση $z = w \cdot u$, με $u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq u_1$

Τότε να αποδείξετε ότι: Οι εικόνες των μιγαδικών u_1, u_2, u_3 <u>δεν</u> βρίσκονται στην ίδια ευθεία. **(Μονάδες 3)**

ΘΕΜΑ Γ

Να αποδείξετε ότι

(Γ1) Η εξίσωση $e^x - 1 = \ln(x+1)$, έχει μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$ **(Μονάδες 7)**

(Γ2) $e^x \geq 1 + \ln(x+1)$, για κάθε $x \in [0,+\infty)$ **(Μονάδες 3)**

Δίνεται η συνάρτηση $f : \Delta = [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \Delta$ υπάρχει μοναδικό $\rho \geq 0$ ώστε να ισχύει: $e^{\rho} - x + 1 \leq f(x) - 2e^{-x} \leq 1 + \ln(\rho+1) - x + 1$.Τότε να αποδείξετε ότι

(Γ3) $f(x) = 2e^{-x} - x + 2$, για κάθε $x \in [0,+\infty)$ **(Μονάδες 5)**

(Γ4) Η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 2$, είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f **(Μονάδες 5)**

(Γ5) Δεν υπάρχει ευθεία (η) η οποία να εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και να είναι παράλληλη με την ευθεία (ε) του ερωτήματος **(Γ4)** **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f , $g\ :\Delta=(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,για τις οποίες ισχύουν

- $g(x)=\int_1^x \frac{\mathrm{f}(\mathrm{t})}{\mathrm{t}^2}\mathrm{dt}-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{t})}{\mathrm{t}^2}\mathrm{dt}$
- Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και $\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$
- Η εξίσωση $\mathrm{f}(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$
- $(\mathrm{f}'(x))^2+\mathrm{f}(x)\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}(x)(\mathrm{f}'(x))^2=\mathrm{f}'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{f}(x)}$, για κάθε $x\in\Delta-\{1\}$

(Δ1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' διατηρεί σταθερό πρόσημο και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα **(Μονάδες 6)**

(Δ2) Να υπολογίσετε την τιμή $\mathrm{f}''(1)$ και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη **(Μονάδες 6)**

Αν $\mathrm{f}(x)=\ln x$, τότε

(Δ3) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\mathrm{e}]$ **(Μονάδες 5)**

(Δ4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $\mathrm{C_g}$ της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\mathrm{e}$ **(Μονάδες 8)**

Γ ΤΑΞΗ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
1^0-3^0-4^0-5^0-6^0 ΓΕΛ ΑΙΓΑΛΕΩ
ΚΥΡΙΑΚΗ 3 ΜΑΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

(Α1) ΟΕΔΒ **260** **(Α2)** ΟΕΔΒ **247** **(Α3)** ΟΕΔΒ **280** **(Α4)** **Σ - Λ - Λ - Λ - Λ**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w και ο πραγματικός αριθμός κ για τους οποίους ισχύουν

- Οι z, w δεν είναι πραγματικοί αριθμοί **(1)**
- $z \neq w$ και $z \neq \overline{w}$ **(2)**
- $|z| = |w| = 1$ **(3)**
- $w = \dfrac{z+\kappa}{\kappa z+1}$ **(4)**

(Β1) Να αποδείξετε ότι: $\kappa = \dfrac{z-w}{wz-1}$ **(Μονάδες 5)**

(Β2) Να αποδείξετε ότι $\kappa \neq 1$ και $\kappa \neq -1$ **(Μονάδες 6)**

(Β3) Αν $|\kappa| > 1$ και $\mathrm{Im}(z), \mathrm{Im}(w)$ το φανταστικό μέρος των μιγαδικών z, w αντίστοιχα , τότε να αποδείξετε ότι:

(Β3α) $\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w) < 0$. **(Μονάδες 7)**

(Β3β) Η εξίσωση: $(\ln(x+1))\,\mathrm{Im}(z) + (1 - e^{x-1})\,\mathrm{Im}(w) = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα ως προς x στο $(0,1)$ **(Μονάδες 4)**

(Β4) Έστω z, w, οι μιγαδικοί των προηγούμενων ερωτημάτων και u_1, u_2, u_3 οι μιγαδικοί u οι οποίοι επαληθεύουν την σχέση $z = w \cdot u$, με $u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq u_1$

Τότε να αποδείξετε ότι: Οι εικόνες των μιγαδικών u_1, u_2, u_3 <u>δεν</u> βρίσκονται στην ίδια ευθεία. **(Μονάδες 3)**

Ενδεικτική απάντηση

(Β1) $w = \dfrac{z+\kappa}{\kappa z+1} \Leftrightarrow \kappa z w + w = z + \kappa \Leftrightarrow \kappa(zw-1) = z - w$ **(4)**

Αν $zw - 1 = 0$, τότε $z = \dfrac{1}{w}$, όμως από **(3)** έχουμε $w\overline{w} = 1$, άρα $z = \overline{w}$

άτοπο λόγω της **(2)**.Επομένως $zw - 1 \neq 0$.Οπότε $\kappa = \dfrac{z-w}{wz-1}$

(Β2) Όταν $\kappa = 1$ τότε , από **(4)** $w = \dfrac{z+1}{z+1} = 1 \in \mathbb{R}$ άτοπο , άρα $\kappa \neq 1$

Όταν $\kappa = -1$ τότε , από **(4)** $w = \dfrac{z-1}{-z+1} = -1 \in \mathbb{R}$ άτοπο , άρα $\kappa \neq -1$

(Β3α) $|\kappa| > 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-w}{wz-1}\right| > 1 \Leftrightarrow |z-w| > |wz-1| \Leftrightarrow |z-w|^2 > |wz-1|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) > (wz-1)(\overline{wz}-1) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 4i^2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w < 0$

(Β3β) Θεωρούμε τη συνάρτηση φ με $\varphi(x) = (\ln(x+1)) \operatorname{Im}(z) + (1-e^{x-1}) \operatorname{Im}(w)$, $x > -1$

η συνάρτηση φ είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ των συνεχών

συναρτήσεων. $\varphi(0) = (1-e^{-1}) \operatorname{Im}(w)$, $1 > e^{-1} = \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow 1-e^{-1} > 0$

$\varphi(1) = \ln 2 \operatorname{Im}(z)$, $2 > 1 \Leftrightarrow \ln 2 > 0$, άρα $\varphi(0)\varphi(1) < 0$

Οπότε η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano

στο διάστημα $[0,1]$.άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $\varphi(x_0) = 0$

Άρα x_0 ρίζα της εξίσωσης $(\ln(x+1)) \operatorname{Im}(z) + (1-e^{x-1}) \operatorname{Im}(w) = 0$

(Β4) $|z| = |w \cdot u| \Leftrightarrow |z| = |w|\,|u|$ και λόγω της **(4)** $|u| = 1$.

Οπότε οι εικόνες των μιγαδικών u_1, u_2, u_3 ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο

άρα δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία

ΘΕΜΑ Γ

Να αποδείξετε ότι

(Γ1) Η εξίσωση $e^{x}-1=\ln(x+1)$, έχει μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$ **(Μονάδες 7)**

(Γ2) $e^{x}\geq 1+\ln(x+1)$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$ **(Μονάδες 3)**

Δίνεται η συνάρτηση $f:\Delta=[0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\Delta$ υπάρχει μοναδικό $\rho\geq 0$ ώστε να ισχύει: $e^{\rho}-x+1\leq f(x)-2e^{-x}\leq 1+\ln(\rho+1)-x+1$.Τότε να αποδείξετε ότι

(Γ3) $f(x)=2e^{-x}-x+2$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$ **(Μονάδες 5)**

(Γ4) Η ευθεία $(\varepsilon):y=-x+2$, είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f **(Μονάδες 5)**

(Γ5) Δεν υπάρχει ευθεία (η) η οποία να εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και να είναι παράλληλη με την ευθεία (ε) του ερωτήματος **(Γ4)** **(Μονάδες 5)**

Ενδεικτική απάντηση

(Γ1) Θεωρούμε τη συνάρτηση φ με $\varphi(x)=e^{x}-1-\ln(x+1)$, $x\geq 0$.Παρατηρούμε ότι $\varphi(0)=0$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta=[0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων και $\varphi'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+1}$.Είναι $e^{x}\geq 1$ και $\dfrac{1}{x+1}\leq 1$ για κάθε $x\geq 0$, άρα $\varphi'(x)\geq 0$, για κάθε $x\geq 0$,οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[0,+\infty)$

Επομένως η εξίσωση $e^{x}-1=\ln(x+1)$, έχει μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$

(Γ2) Από το **(Γ1)** η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[0,+\infty)$ άρα $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$, οπότε $e^{x}\geq 1+\ln(x+1)$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$

(Γ3) $e^{\rho}-x+1\leq f(x)+2e^{-x}\leq 1+\ln(\rho+1)-x+1$, $x\in\Delta=[0,+\infty)$

οπότε $e^{\rho}\leq 1+\ln(\rho+1)\Leftrightarrow\varphi(\rho)\leq 0=\varphi(0)$.

Όμως, από το ερώτημα**(Γ2)**, $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$ άρα $\varphi(\rho)\geq 0$,συνεπώς $\varphi(\rho)=0=\varphi(0)$, άρα $\rho=0$.

Οπότε έχουμε $1-x+1\leq f(x)+2e^{-x}\leq 1-x+1$,επομένως $f(x)=-2e^{-x}-x+2$

(Γ4) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[-2\dfrac{e^{-x}}{x}-1+\dfrac{2}{x}]=-1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[-2e^{-x}+2]=2$

άρα η ευθεία $(\varepsilon):y=-x+2$, είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

(Γ5) Είναι $f'(x)=2e^{-x}-1$, ο συντελεστής διεύθυνσης κάθε ευθείας (η) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, είναι $2e^{-x}-1$.

Αν $(\eta)//(\varepsilon)$ πρέπει $2e^{-x}-1=-1$, άρα $e^{-x}=0$, άτοπο.

Οπότε κάθε ευθεία (η) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, δεν είναι παράλληλη με την ευθεία (ε)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \Delta=(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν

- $g(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt-\frac{e}{e-1}\int_1^e \frac{f(t)}{t^2}dt$
- Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f'(x)f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$
- Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$
- $(f'(x))^2+f(x)f''(x)+f(x)(f'(x))^2=f'(x)e^{-f(x)}$, για κάθε $x\in\Delta-\{1\}$

(Δ1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' διατηρεί σταθερό πρόσημο και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα **(Μονάδες 6)**

(Δ2) Να υπολογίσετε την τιμή $f''(1)$ και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη **(Μονάδες 6)**

Αν $f(x)=\ln x$, τότε

(Δ3) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,e]$ **(Μονάδες 5)**

(Δ4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$ **(Μονάδες 8)**

Ενδεικτική απάντηση - Λύση

(Δ1) Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\Delta=(0,+\infty)$, αν δεν διατηρεί σταθερό τότε υπάρχει $\rho\in\Delta$ ώστε $f'(\rho)=0$, άτοπο.

Άρα $f'(x)\neq 0$, επομένως η συνάρτηση f' διατηρεί σταθερό πρόσημο.
Η συνάρτηση f'' είναι συνεχής στο $\Delta=(0,+\infty)$, οπότε

$\lim_{x\to 1}[(f'(x))^2+f(x)f''(x)+f(x)(f'(x))^2]=\lim_{x\to 1}[f'(x)e^{-f(x)}]$, άρα

$(f'(1))^2=f'(1)$ οπότε $f'(1)=1$, άρα $f'(x)>0$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta=(0,+\infty)$

(Δ2) $f''(x) = \dfrac{f'(x)e^{-f(x)} - f(x)(f'(x))^2 - (f'(x))^2}{f(x)}$ και $f''(x)$ συνεχής

$\lim\limits_{x\to 1}[f'(x)e^{-f(x)} - f(x)(f'(x))^2 - (f'(x))^2] = 0$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

Από τους κανόνες De l' Hospital έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f''(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)e^{-f(x)} - (f'(x))^2 e^{-f(x)} - (f'(x))^3 - 2f(x)f'(x)f''(x) - 2f'(x)f''(x)}{f'(x)}$$

$f''(1) = f''(1) - 1 - 1 - 2f''(1) \Rightarrow f''(1) = -1$ και $f''(x) \neq 0$ άρα $f''(x) < 0$

για κάθε $x \in \Delta$,οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ

$f(x) = \ln x$ και $g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt - \frac{e}{e-1}\int_1^e \frac{f(t)}{t^2}dt$

(Δ3) $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2} = \dfrac{\ln x}{x^2} \geq 0$, για κάθε $x \in [1, e]$ άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$

(Δ4) Είναι $g(e) = \int_1^e \frac{f(t)}{t^2}dt - \frac{e}{e-1}\int_1^e \frac{f(t)}{t^2}dt$,άρα $g(e) = (1 - \frac{e}{e-1})\int_1^e \frac{f(t)}{t^2}dt < 0$

οπότε $g(x) < 0$, για κάθε $x \in [1, e]$

Επομένως $E(\Omega) = -\int_1^e g(x)dx = -\left[\int_1^e [\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt]dx - \frac{e}{e-1}\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt \int_1^e 1dx\right]$

$$E(\Omega) = -\left[\int_1^e x'[\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt]dx - \frac{e}{e-1}(e-1)\int_1^e \frac{f(t)}{t^2}dt\right]$$

$$E(\Omega) = -\left\{[x\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt]_1^e - \int_1^e x\frac{f(x)}{x^2}dx - e\int_1^e \frac{f(t)}{t^2}dt\right\}$$

$$E(\Omega) = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^e (\ln^2 x)'dx = \frac{1}{2} \text{ τ.μ}$$

Δεύτερη Ενδεικτική απάντηση - Λύση

1η Περίπτωση $x \in (0,1)$

$e^{f(x)}(f'(x))^2 + f(x)f''(x)e^{f(x)} + f(x)(f'(x))^2 e^{f(x)} = f'(x)$, για κάθε $x \in \Delta - \{1\}$

$\left(f(x)f'(x)e^{f(x)}\right)' = f'(x)$, άρα $f(x)f'(x)e^{f(x)} = f(x) + C$, όμως οι συναρτήσεις f, f' είναι συνεχείς στο $x = 1$ και $f(1) = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)f'(x)e^{f(x)}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(f(x) + C\right)$, άρα $C = 0$, οπότε $f(x)f'(x)e^{f(x)} = f(x)$

$f'(x)e^{f(x)}=1 \Rightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=x'$, άρα $e^{f(x)}=x+C_1$ είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)e^{f(x)}=\lim\limits_{x\to 1}(x+C_1)$

άρα $C_1=0$ επομένως $e^{f(x)}=x$, οπότε $f(x)=\ln x$.

2η Περίπτωση $x\in(1,+\infty)$, όμοια $f(x)=\ln x$

(Έτσι αντιμετωπίζονται τα ερωτήματα Δ1,Δ2,Δ3)

Και για τον υπολογισμό του εμβαδού

ή

$\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt=\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt=\int_1^x \left(-t^{-1}\right)'\ln t dt=\left[-t^{-1}\ln t\right]_1^x-\int_1^x -t^{-1}t^{-1}dt$, άρα

$\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+1$, άρα $g(x)=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+1-\frac{e}{e-1}\int_1^e \frac{f(t)}{t^2}dt$ κ.τ.λ

ή

$\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt=\int_1^x \frac{\ln t+1-1}{t^2}dt=\cdots \kappa.\tau.\lambda$,