3ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα 2015

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

Α1. Εστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

μονάδες 7

Α2. Πότε το σημείο ($A(x_0,f(x_0))$) ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

μονάδες 4

Α3. Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\alpha f(x)dx=0$.

ii. Αν f,g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta g(x)dx$, τότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

iii. Αν συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv. Ενα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f, μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

v. Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha,\beta]$, τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα της μέσης τιμής, στο ίδιο διάστημα.

μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1,z_2 με $\frac{4+z_1z_2}{z_1+z_2}=5$ των οποίων οι εικόνες Α,Β είναι σημεία του μοναδιαίου κύκλου.

Β1. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w=z_1+z_2$ είναι πραγματικός.

μονάδες 5

Β2. Αν τα Α,Β είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x, να αποδείξετε ότι τα z_1,z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2-z+1=0$.

μονάδες 5

Β3. Να αποδείξετε ότι $(w+i)^{4k}=(1-wi)^{4k}$, $k\in\mathbb{N}^*$

μονάδες 5

Β4. Αν Γ είναι η εικόνα του $-w$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

μονάδες 5

Β5. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|u-z_1|+|u-z_2|$, $u\in\mathbb{C}$.

μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq x$ για κάθε $x\geq 0$.

μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

μονάδες 5

Εστω ότι επιπλέον για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $x\left(f'(x)-f(x)\right)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=e$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^x,\ x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ορίζόντια ασύμπτωτή της και τον άξονα y΄y.

μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$x^2-2\int_0^x\left(\int_0^{f(u)}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt\right)du=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=0$ και $f'(0)=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-e^{-x}$.

μονάδες 7

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2(x+\sigma\upsilon\nu x)+e^{-x}}-e^{e^{-x}}=e^{x+\sigma\upsilon\nu x+2e^{-x}}-e^{x+\sigma\upsilon\nu x}$.

μονάδες 6

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{2x}=\lambda e^x+1,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

μονάδες 6

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^{4x}+e^{3x}-3e^{2x}-2e^x+2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,\ln 2)$.

μονάδες 6

Καλή Επιτυχία στις εξετάσεις!!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$.(1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Εστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Α3. Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Α4. i. Σ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή $\dfrac{4+z_1z_2}{z_1+z_2}=5$, είναι $\dfrac{4+z_1z_2}{z_1+z_2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{4+z_1z_2}{z_1+z_2}=\dfrac{4+\bar z_1\bar z_2}{\bar z_1+\bar z_2}\Leftrightarrow$

$$4\bar z_1+4\bar z_2+\bar z_1z_1z_2+\bar z_2z_1z_2=4z_1+4z_2+z_1\bar z_1\bar z_2+z_2\bar z_1\bar z_2\Leftrightarrow$$

$$4\bar z_1+4\bar z_2+\cancelto{1}{|z_1|^2}z_2+z_1\cancelto{1}{|z_2|^2}=4z_1+4z_2+\cancelto{1}{|z_1|^2}\bar z_2+\bar z_1\cancelto{1}{|z_2|^2}\Leftrightarrow$$

$$3\bar z_1+3\bar z_2=3z_1+3z_2\Leftrightarrow z_1+z_2=\bar z_1+\bar z_2\Leftrightarrow w=\bar w\Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$$

Β2. Επειδή τα Α,Β είναι συμμετρικά ως προς τον x΄x οι z_1,z_2 είναι συζυγείς, οπότε

$$z_1z_2=z_1\bar z_1=|z_1|^2=1 \text{ και } \frac{4+z_1z_2}{z_1+z_2}=5\Leftrightarrow\frac{5}{z_1+z_2}=5\Leftrightarrow z_1+z_2=1.$$

Επειδή τα z_1,z_2 έχουν άθροισμα 1 και γινόμενο 1, από τους τύπους Vietta προκύπτει ότι είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2-z+1=0$.

Β3. Είναι $w=z_1+z_2=1$, άρα

$$(w+i)^{4k}=(1-wi)^{4k}\Leftrightarrow(1+i)^{4k}=(1-i)^{4k}\Leftrightarrow\left[(1+i)^2\right]^{2k}=\left[(1-i)^2\right]^{2k}\Leftrightarrow$$

$$(1+2i-1)^{2k}=(1-2i-1)^{2k}\Leftrightarrow 2^{2k}i^{2k}=2^{2k}i^{2k} \text{ ισχύει}$$

Β4. Η εξίσωση $z^2-z+1=0$ έχει $\Delta=-3<0$ και ρίζες $z_1=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt3}{2}$, $z_2=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt3}{2}$

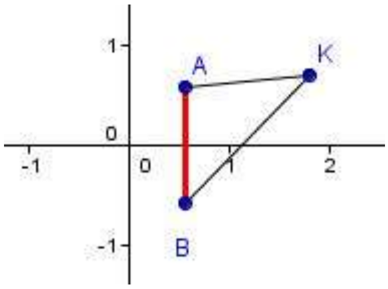
Είναι $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt3}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt3}{2}\right)$ και $\Gamma(-1,0)$. Είναι

$(AB)=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, $(A\Gamma)=\sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$ και

$(B\Gamma)=\sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$, δηλαδή $(AB)=(A\Gamma)=(B\Gamma)$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Β5. Εστω Κ η εικόνα του u. Είναι $|u-z_1|+|u-z_2|=|\vec{KA}|+|\vec{KB}|$.

Από τη τριγωνική ανισότητα ισχύει ότι $|\vec{KA}|+|\vec{KB}|\geq|\vec{AB}|$, άρα η ελάχιστη τιμή του $|u-z_1|+|u-z_2|$ είναι το $|\vec{AB}|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, όταν το Κ είναι σημείο του



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εστω $g(x)=f(x)-x,\ x\geq 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $g'(x)=f'(x)-1$.

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)=1\Leftrightarrow f'(x)-1>0$ άρα $g'(x)>0$ και $g\nearrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $g(x)\geq g(0)=0\Leftrightarrow f(x)-x\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq x$.

Γ2. Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>x>0\Leftrightarrow 0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ είναι και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ και αφού $f(x)>0$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Γ3. $x(f'(x)-f(x))=f(x)\Leftrightarrow xf'(x)-xf(x)-f(x)=0\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=xf(x)$

Για κάθε $x\neq 0$ είναι $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\frac{f(x)}{x}=c_1e^x,\ x>0\\ \frac{f(x)}{x}=c_2e^x,\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=c_1xe^x, x>0\\ f(x)=c_2xe^x, x<0\end{cases},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

$f(1)=e\Leftrightarrow c_1e=e\Leftrightarrow c_1=1$, άρα $\begin{cases}f(x)=xe^x\quad ,x>0\\ f(x)=c_2xe^x, x<0\end{cases}$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και στο $x=0$, άρα

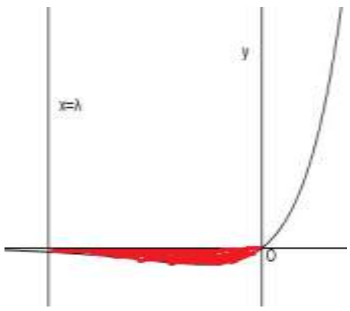
$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0^-}\frac{c_2\cancel{x}e^x}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\cancel{x}e^x}{\cancel{x}}\Leftrightarrow c_2=1$, άρα

$f(x)=xe^x$ για κάθε $x\neq 0$ και αφού $f(0)=0$, τελικά είναι $f(x)=xe^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ4. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$, άρα η $y=0$, δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Θεωρούμε κατακόρυφη ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda < 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον x΄x, την $x = \lambda$ και τη $x = 0$ είναι:



$$E(\lambda) = -\int_\lambda^0 xe^x dx = -\int_\lambda^0 x(e^x)' dx = -\left[xe^x\right]_\lambda^0 + \int_\lambda^0 e^x dx = \lambda e^\lambda + \left[e^x\right]_\lambda^0 = \lambda e^\lambda + 1 - e^\lambda = (\lambda - 1)e^\lambda + 1$$

Είναι $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} (\lambda-1)e^\lambda = \lim\limits_{\lambda\to-\infty} \dfrac{\lambda-1}{e^{-\lambda}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{\lambda\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-\lambda}} = 0$, άρα $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} E(\lambda) = 1$

Είναι $E(\Omega) = \lim\limits_{\lambda\to-\infty} E(\lambda) = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $x^2 - 2\int_0^x \left(\int_0^{f(u)} \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt\right) du = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2\int_0^x \left(\int_0^{f(u)} \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt\right) du \Rightarrow$

$$\left(x^2\right)' = \left(2\int_0^x \left(\int_0^{f(u)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt\right) du\right)' \Leftrightarrow \cancel{2}x = \cancel{2}\int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \Rightarrow (x)' = \left(\int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt\right)'$$

$$1 = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{1+f^2(x)} \ (1) \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2 = 1 + f^2(x) \Rightarrow$$

$$\left[\left(f'(x)\right)^2\right]' = \left(1+f^2(x)\right)' \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) = 2f(x)f'(x) \quad (2)$$

Από την (1) προκύπτει ότι $f'(x) > 0$ άρα από (2) έχουμε:

$f''(x) = f(x) \Leftrightarrow f''(x) + f'(x) = f'(x) + f(x) \Leftrightarrow$

$\left(f'(x) + f(x)\right)' = f'(x) + f(x) \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = ce^x$

Για $x = 0$ είναι $f'(0) + f(0) = c \Leftrightarrow c = 2$ άρα

$$f'(x) + f(x) = 2e^x \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)' = \left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow e^x f(x) = e^{2x} + c_1$$

Για $x = 0$ είναι $c_1 = -1$, άρα $e^x f(x) = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow f(x) = e^x - e^{-x}$.

Δ2. $e^{2(x+\sigma\upsilon\nu x)+e^{-x}} - e^{e^{-x}} = e^{x+\sigma\upsilon\nu x+2e^{-x}} - e^{x+\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow e^{e^{-x}} \cdot e^{2(x+\sigma\upsilon\nu x)} - e^{e^{-x}} = e^{x+\sigma\upsilon\nu x} \cdot e^{2e^{-x}} - e^{x+\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$

$$e^{e^{-x}} \cdot \left(e^{2(x+\sigma\upsilon\nu x)} - 1\right) = e^{x+\sigma\upsilon\nu x} \cdot \left(e^{2e^{-x}} - 1\right) \Leftrightarrow \frac{e^{2(x+\sigma\upsilon\nu x)} - 1}{e^{x+\sigma\upsilon\nu x}} = \frac{e^{2e^{-x}} - 1}{e^{e^{-x}}} \Leftrightarrow$$

$$e^{x+\sigma\upsilon\nu x} - e^{-(x+\sigma\upsilon\nu x)} = e^{e^{-x}} - e^{-e^{-x}} \Leftrightarrow f(x+\sigma\upsilon\nu x) = f\left(e^{-x}\right) \ (3)$$

Είναι $f'(x) = e^x + e^{-x} > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1, οπότε η (3) γίνεται $x + \sigma\upsilon\nu x = e^{-x}$, δηλαδή αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $x + \sigma\upsilon\nu x - e^{-x} = 0$.

Εστω $g(x) = x + \sigma\upsilon\nu x - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = (1 - \eta\mu x) + e^{-x} > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$.

Επειδή $g(0) = 0$, η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της $g(x) = x + \sigma\upsilon\nu x - e^{-x} = 0$.

Δ3. $e^{2x}=\lambda e^{x}+1 \Leftrightarrow e^{2x}-1=\lambda e^{x} \Leftrightarrow e^{x}-e^{-x}=\lambda \Leftrightarrow f(x)=\lambda$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}-e^{-x}\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-e^{-x}\right)=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι:

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\mathbb{R}$.

Επειδή $\lambda\in\mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Δ4. $f(x)=e^{4x}+e^{3x}-3e^{2x}-2e^{x}+3 \Leftrightarrow e^{x}-e^{-x}=e^{4x}+e^{3x}-3e^{2x}-2e^{x}+3 \Leftrightarrow$

$e^{x}-\dfrac{1}{e^{x}}=e^{4x}+e^{3x}-3e^{2x}-2e^{x}+3 \Leftrightarrow e^{2x}-1=e^{5x}+e^{4x}-3e^{3x}-2e^{2x}+3e^{x} \Leftrightarrow$

$e^{5x}+e^{4x}-3e^{3x}-3e^{2x}+3e^{x}+1=0$

Θέτουμε $e^{x}=\omega>0$, για $x=0$ είναι $\omega=1$ και για $x=\ln 2$ είναι $\omega=2$, οπότε αρκεί η εξίσωση $\omega^{5}+\omega^{4}-3\omega^{3}-3\omega^{2}+3\omega+1=0$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$.

Παρατηρούμε ότι $1^{5}+1^{4}-3\cdot1^{3}-3\cdot1^{2}+3\cdot1+1=0$, οπότε ΄κάνοντας σχήμα Horner προκύπτει: $(\omega-1)\left(\omega^{4}+2\omega^{3}-\omega^{2}-4\omega-1\right)=0$, οπότε αρκεί η εξίσωση

$\omega^{4}+2\omega^{3}-\omega^{2}-4\omega-1=0$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$.

Εστω $h(\omega)=\omega^{4}+2\omega^{3}-\omega^{2}-4\omega-1,\ \omega\in[1,2]$.

Είναι $h(1)=-3<0,\ h(2)=19>0$, δηλαδή $h(1)h(2)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής, η εξίσωση $h(\omega)=0 \Leftrightarrow \omega^{4}+2\omega^{3}-\omega^{2}-4\omega-1=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$.