3η Άσκηση

2020-2021

Αντίστροφη

Έστω συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f\left(x^3\right)=\begin{cases}\lambda x^6 &, x<0\\ (\lambda-2)x^6, & x\geq 0\end{cases}$, όπου ο λ είναι ακέραιος διαφορετικός του 0.

α) Να δείξετε ότι $f\left(x\right)=\begin{cases}\lambda x^2 &, x<0\\ (\lambda-2)x^2, & x\geq 0\end{cases}$.

β) Να δείξετε ότι $\lambda=1$.

γ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η $f\circ f$.

δ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ε) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} σε διαφορετικό σύστημα αξόνων.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Θέτουμε $x^3 = u$, τότε $x^6 = u^2$.

Αν $x<0$ τότε $u<0$ και $f(u)=\lambda u^2$. Αν $x\ge 0$ τότε $u\ge 0$ και $f(u)=(\lambda-2)u^2$.

Τελικά $f(u)=\begin{cases}\lambda u^2 &, u<0\\ (\lambda-2)u^2, & u\ge 0\end{cases}$, οπότε και $f(x)=\begin{cases}\lambda x^2 &, x<0\\ (\lambda-2)x^2, & x\ge 0\end{cases}$.

β) Έστω $x_1,x_2<0$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^2>x_2^2$ (1)

Αν $\lambda<0$, τότε $(1)\Rightarrow \lambda x_1^2<\lambda x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow(-\infty,0)$ που είναι άτοπο αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα $\lambda>0$.

Αν $\lambda>0$, τότε $(1)\Rightarrow \lambda x_1^2>\lambda x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow(-\infty,0)$. Άρα $\lambda>0$.

Έστω $x_1,x_2\ge 0$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^2<x_2^2$ (2)

Αν $\lambda-2>0\Leftrightarrow \lambda>2$, τότε $(2)\Rightarrow(\lambda-2)x_1^2<(\lambda-2)x_2^2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ που είναι άτοπο αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Αν $\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=2$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\ge 0$, οπότε η f είναι σταθερή στο $[0,+\infty)$ και δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Αν $\lambda-2<0$ τότε $(2)\Rightarrow(\lambda-2)x_1^2>(\lambda-2)x_2^2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

Άρα $\lambda-2<0\Leftrightarrow\lambda<2$.

Επειδή $\lambda\in\mathbb{Z}$ και $0<\lambda<2$, είναι $\lambda=1$.

Για λ=1 : $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x^2, & x\ge 0\end{cases}$.

Έστω $x_1<0\le x_2$ τότε $x_1^2>0>-x_2^2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει:

$$\begin{cases}x\in D_f\\ f(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x<0\\ x^2<0\end{cases}\text{αδύνατο}\right)\ ή$$

$$\left(\begin{cases}x<0\\ x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x<0 \text{ οπότε } (f\circ f)(x)=f(f(x))=(-x^2)^2=x^4\right)\ ή$$

$$\left(\begin{cases}x\ge 0\\ -x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=0 \text{ οπότε } (f\circ f)(0)=-0^2=0\right)\ ή$$

$$\left(\begin{cases}x\ge 0\\ -x^2<0\end{cases}\Leftrightarrow x>0 \text{ οπότε } (f\circ f)(x)=f(f(x))=-(x^2)^2=-x^4\right)$$

άρα $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\begin{cases}x^4, & x\ge 0\\ -x^4, & x<0\end{cases}$.

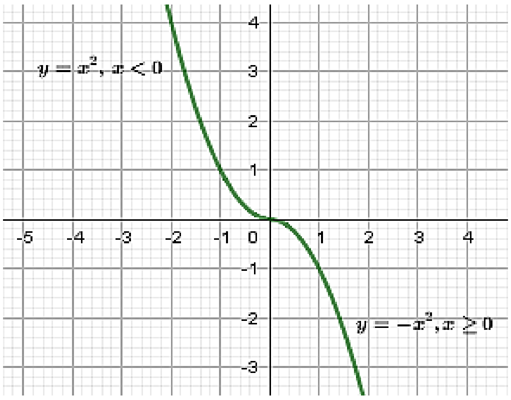
δ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για $x<0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow x^2=y\overset{y>0}{\Leftrightarrow}-x=\sqrt{y}\Leftrightarrow x=-\sqrt{y}$

Για $x\ge 0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow -x^2=y\overset{y\le 0}{\Leftrightarrow}x^2=-y\Leftrightarrow x=\sqrt{-y}$.

Άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\sqrt{y}, & y>0\\ \sqrt{-y}, & y\le 0\end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{x}, & x>0\\ \sqrt{-x}, & x\le 0\end{cases}$.

ε)



Η γραφική παράσταση της $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $x > 0$ είναι η συμμετρική της $y = \sqrt{x}$ ως προς τον άξονα x΄x.
Η γραφική παράσταση της $f^{-1}(x) = \sqrt{-x}$, $x \leq 0$ είναι η συμμετρική της $y = \sqrt{x}$ ως προς τον άξονα y΄y.