**5η Βαλκανιάδα Νέων κάτω των 15 ½**
**JBMO (Junior Balkan Mathematical Olympiad)**
**17-22 Ιουνίου, 2001, Λευκωσία, Κύπρος**

***Ημερομηνία διαγωνισμού : Πέμπτη, 19 Ιουνίου, 15.00-19.30***

*Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου – Θεόκλητος Παραγιού*

***Να λυθούν όλα τα προβλήματα***

1. *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι a, b, c ώστε να ισχύει:* $a^3+b^3+c^3=2001$.

2. *Θεωρούμε τρίγωνο ABC με* $\widehat{ACB}=90°$ *και* $AC \neq BC$. *Παίρνουμε τα σημεία L και H της πλευράς AB ώστε* $\widehat{ACL}=\widehat{LCB}$ *και με CH κάθετο ευθύγραμμο τμήμα πάνω στην AB.*
   *α) Για κάθε σημείο X (διαφορετικό από το C) της ευθείας CL να αποδείξετε ότι* $\widehat{XAC} \neq \widehat{XBC}$.
   *β) Για κάθε σημείο Y (διαφορετικό από το C) της ευθείας CH να αποδείξετε ότι* $\widehat{YAC} \neq \widehat{YBC}$.

3. *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABC. Έστω D, E τυχαία σημεία των πλευρών AB και AC αντίστοιχα. Αν DF, EG* ($F \in AE$, $G \in AD$) *είναι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ADE, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων DEF και DEG είναι μικρότερο ή ίσο από εμβαδόν του τριγώνου ABC. Επίσης να εξηγήσετε σε ποια περίπτωση ισχύει η ισότητα.*

4. *Δίνεται κυρτό πολύγωνο με 1415 πλευρές το οποίο έχει περίμετρο ίση με 2001cm. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρεις κορυφές αυτού του πολυγώνου, που σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν μικρότερο από* $1cm^2$.

---

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

### Άσκηση 1.

Αν υποθέσουμε ότι $a \le b \le c$ θα αποδείξουμε ότι έχουμε μια μοναδική λύση την $a=1$ και $b=c=10$.

Εστω $n \in N$. Αν $n=3k$, $k \in N$ τότε $n^3=9\lambda$ και αν $n=3k\pm 1$ τότε $n^3=9\lambda \pm 1$.(1)

Παρατηρούμε ότι $2001 \equiv 3(\bmod 9)$. Επειδή $a^3+b^3+c^3=2001$ για να ισχύει $a^3+b^3+c^3=2001 \equiv 3(\bmod 9)$ η μοναδική περίπτωση απο την (1) είναι:

$\alpha^3 \equiv b^3 \equiv c^3 \equiv 1(\bmod 9)$ και άρα $a \equiv b \equiv c \equiv 1(\bmod 3)$, δηλαδή $a=3m+1$, $b=3n+1$, $c=3p+1$ και επομένως έχουμε:

$$a^3+b^3+c^3=27\left(m^3+n^3+p^3\right)+27\left(m^2+n^2+p^2\right)+9\left(m+n+p\right)+3=2001$$

Άρα $\left(3m^3+3m^2+m\right)+\left(3n^3+3n^2+n\right)+\left(3p^3+3p^2+p\right)=222$ με $m,n,p \ge 0$.

Παρατηρούμε ότι: $3\cdot 4^3+3\cdot 4^2+4=244\rangle 222$, άρα $m,n,p\le 3$.

Αν $m=0\Rightarrow 3m^3+3m^2+m=0$. Αν $m=1\Rightarrow 3m^3+3m^2+m=7$

Αν $m=2\Rightarrow 3m^3+3m^2+m=48$ Αν $m=3\Rightarrow 3m^3+3m^2+m=111$

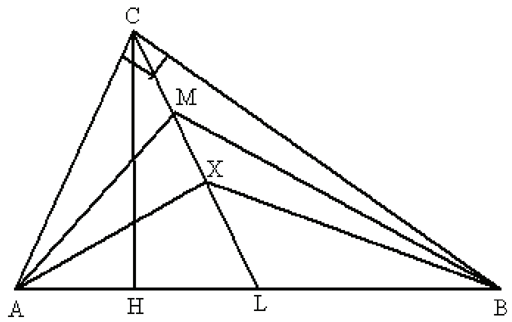
Για να πάρουμε άθροισμα 222 πρέπει $m=0$ και $n=p=3$ και επομένως τελικά θα έχουμε $a=1$ και $b=c=10$.

---

## Άσκηση 2.

(α) Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής».

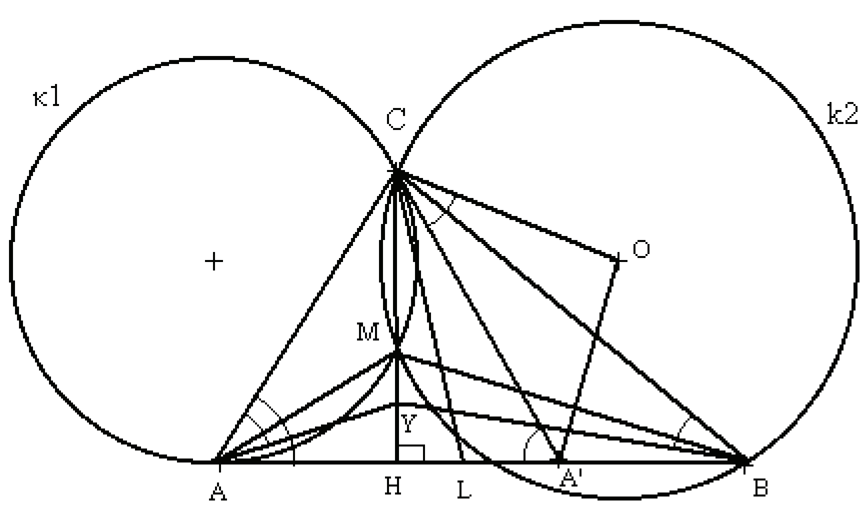
Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σημείο Μ πάνω στην CL για το οποίο ισχύει $\widehat{MAC}=\widehat{MBC}$.




Επειδή η CL είναι διχοτόμος της $\widehat{ACB}$ έχουμε ότι: $\widehat{ACM}=\widehat{MCB}$ και επομένως $\widehat{AMC}=\widehat{CMB}$.

Τα τρίγωνα AMC και BMC είναι ίσα, άρα, AC=BC, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση AC≠BC, επομένως δεν υπάρχει κανένα σημείο Μ της CL για το οποίο ισχύει $\widehat{MAC}=\widehat{MBC}$. Δηλαδή για κάθε σημείο Χ της CL ισχύει: $\widehat{XAC}\ne\widehat{XBC}$.

(β) Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σημείο Μ πάνω στην CH για το οποίο ισχύει $\widehat{MAC}=\widehat{MBC}$. Τότε ο περιγεγραμμένος κύκλος ($k_1$) του AMC είναι ίσος με τον περιγεγραμμένο κύκλο ($k_2$) του BMC.




Αν το σημείο Α΄ είναι συμμετρικό ώς προς το Η τότε το Άρα βρίσκεται πάνω στον κύκλο (k2) και πάνω στην ΑΒ.

Έστω O το κέντρο του (k2).Αφού $\widehat{AA'C} = \widehat{A'AC} = \widehat{BAC}$ έχουμε ότι:

$\widehat{COA'} = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{AA'C}$ (επειδή το A΄ βρίσκεται πάνω στον κύκλο (k2) και είναι επίκεντρη – εγγεγραμμένη στο ίδιο τόξο CA΄.)

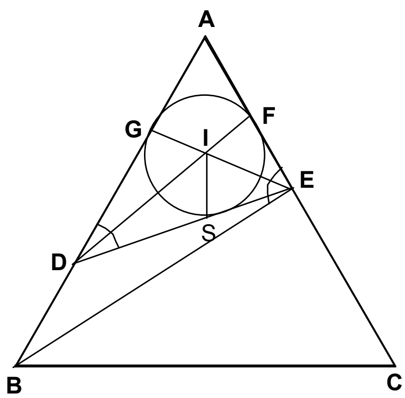
Το τρίγωνο COA΄ είναι ισοσκελές άρα έχουμε:

$$2\widehat{OCA'} = 180^\circ - \widehat{COA'} \Rightarrow \widehat{OCA'} = 90^\circ - \frac{\widehat{COA'}}{2} \Rightarrow \widehat{OCA'} = 90^\circ - \widehat{CBA}$$

Άρα από την τελευταία σχέση και από το ορθογώνιο τρίγωνο ABC έχουμε: $\widehat{OCA'} = \widehat{CAB}$ .

Όμως $\widehat{ACH} = \widehat{ABC}$ (πλευρές κάθετες) και $\widehat{ACH} = \widehat{A'CH}$ ( το τρίγωνο ACA΄ ισοσκελές) επομένως $\widehat{HCA'} = \widehat{ABC}$ και έχουμε: $\widehat{HCO} = \widehat{HCA'} + \widehat{A'CO} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 90^\circ$, άρα $CH \perp CO$ δηλαδή CH εφαπτομένη του κύκλου (k2) .Αυτό είναι άτοπο γιατί δεν υπάρχει τέτοιο σημείο M ≠C με $\widehat{MAC} = \widehat{MBC}$ πάνω στην εφαπτόμενη του κύκλου (k2).

## Άσκηση 3.




Έχουμε :

$$\widehat{AGI} = \widehat{ADE} + \widehat{GED}$$
$$= \widehat{ADE} + \frac{180^o - \hat{A} - \widehat{ADE}}{2} = 60^o + \frac{\widehat{ADE}}{2}$$

και από το τρίγωνο ADF έχουμε:

$$\widehat{IFE} = \hat{A} + \widehat{ADF} = 60^o + \frac{\widehat{ADE}}{2}.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{AGI} = \widehat{IFE}$ .(1)

Παίρνουμε ένα σημείο S πάνω στην DE τέτοιο ώστε $\widehat{GID} = \widehat{DIS}$ .

Τα τρίγωνα DGI και DIS είναι ίσα γιατί DI=DI και $\widehat{GDI} = \widehat{IDS}$ . Άρα έχουμε ότι : DG =DS (2)

Τα τρίγωνα IFE και ISE είναι ίσα γιατί: IE=IE, $\widehat{IEF} = \widehat{IES}$ και $\widehat{ISE} = \widehat{AGE} = \widehat{IFE}$ από την (1).

Άρα έχουμε ότι : EF =ES (3)

Απο τις (2) και (3) έχουμε: DG +EF =DE (4).

Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ADE τότε έχουμε:

$$\frac{1}{2}\rho \cdot DG + \frac{1}{2}\rho \cdot EF = \frac{1}{2}\rho \cdot DE \Rightarrow E_{IDG} + E_{IEF} = E_{IDE}$$ . Άρα $E_{DEF} + E_{DEG} = 3E_{IDE}$ (5)

Αν το M είναι σημείο που ανήκει στο τόξο με χορδή την BC , τότε το εμβαδόν του τριγώνου MBC μεγιστοποιείται όταν το M είναι μέσον του τόξου. Αρα έχουμε:

$E_{IDE} \leq E_{DME}$ όπου M είναι το μέσον του τόξου $\overset{\frown}{BC} = 120^o$ .

Έχουμε επίσης ότι: $DE \leq BE \leq BC$ (γιατί $\widehat{BDE} \geq 60^o \geq \widehat{ABE}$ και $\widehat{BEC} \geq 60^o$ )

Άρα έχουμε: $E_{IDE} \leq E_{OBC}$ όπου O είναι το κέντρο του τριγώνου ABC.

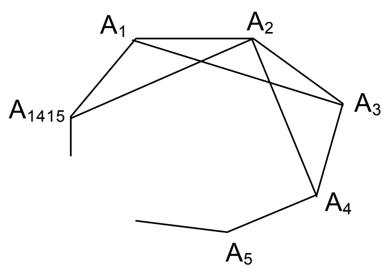
Τελικά από την (5) έχουμε:

$$E_{IDE} \leq E_{OBC}$$

$$E_{DEF} + E_{DEG} = 3E_{IDE} \leq 3E_{OBC} = E_{ABC}$$

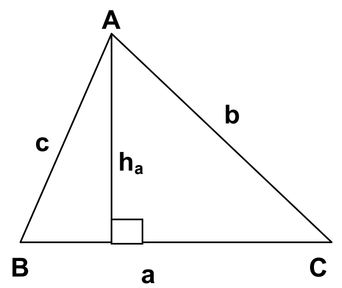
Η ισότητα ισχύει όταν το D ταυτιστεί με το B και το F ταυτιστεί με το C.

## Άσκηση 4.




Έστω $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{1415}$ το δεδομένο πολύγωνο. Στο πολύγωνο υπάρχουν 1415 τρίγωνα που ορίζονται από τρεις διαδοχικές κορυφές: $A_1A_2A_3$ , $A_2A_3A_4$ ,…., $A_{1414}A_{1415}A_1$ , $A_{1415}A_1A_2$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής». Υποθέτουμε ότι κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα έχει ***εμβαδόν*** $E \geq 1$ (1).




Για κάθε τρίγωνο με πλευρές a και b έχουμε: $2E = a \cdot h_a \leq a \cdot b$ (2) επειδή $h_a \leq b$ .

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) για κάθε ένα από τα παραπάνω τρίγωνα ισχύουν: $A_1A_2 \cdot A_2A_3 \geq 2$ ,

$A_2A_3 \cdot A_3A_4 \geq 2$ , …, $A_{1415}A_1 \cdot A_1A_2 \geq 2$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα για τον αριθμητικό και γεωμετρικό μέσο $\left(\alpha + b \geq 2\sqrt{\alpha b}\right)$, στις παραπάνω ανισότητες έχουμε:

$A_1A_2 + A_2A_3 \geq 2\sqrt{2}$ , $A_2A_3 + A_3A_4 \geq 2\sqrt{2}$ ,…, $A_{1415}A_1 + A_1A_2 \geq 2\sqrt{2}$ .

Αν Π η περίμετρος του πολυγώνου, προσθέτοντας τις τελευταίες ανισότητες έχουμε:

$2\Pi \geq 1415 \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow \Pi \geq 1415\sqrt{2}$ αλλά $\sqrt{2} \approx 1.4142$ έτσι έχουμε:

$\Pi \geq 2001,093 \Rightarrow \Pi > 2001$ . Το τελευταίο είναι άτοπο από την υπόθεση, άρα υπάρχουν κάποια από τα τρίγωνα που έχουν εμβαδόν $E<1$ .