8η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΝΕΩΝ

JBMO 2004

Σερβία - Μαυροβούνιο, Νόβισαντ, Ιούνιος 2004

Junior Balkan

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι η ανισότητα $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y που δεν είναι και οι δύο 0.

Πρόβλημα 2

Έστω ABC ένα ισοσκελές τρίγωνο με AC = BC. M είναι το μέσον της AC και ℓ είναι η ευθεία που περνάει από το C και είναι κάθετη προς την πλευρά AB. O κύκλος που περνάει από τα σημεία B, C και M τέμνει την ευθεία ℓ στα σημεία C και Q. Να βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC συναρτήσει του m = CQ.

Πρόβλημα 3

Αν οι θετικοί ακέραιοι x και y είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί 3x + 4y και 4x + 3y είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x και y είναι και οι δύο πολλαπλάσια του 7.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ένα κυρτό πολύγωνο με n κορυφές, $n \geq 4$. Χωρίζουμε τυχαία το πολύγωνο σε τρίγωνα, που όλες οι κορυφές τους είναι ταυτόχρονα και κορυφές του πολυγώνου, έτσι ώστε ανά δύο να μην έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Χρωματίζουμε με μαύρο χρώμα εκείνα τα τρίγωνα των οποίων δύο πλευρές τους είναι ταυτόχρονα και πλευρές του πολυγώνου, με κόκκινο εκείνα τα τρίγωνα των οποίων μία μόνο πλευρά τους είναι ταυτόχρονα και πλευρά του πολυγώνου και με άσπρο εκείνα τα τρίγωνα των οποίων καμία πλευρά τους δεν είναι και πλευρά του πολυγώνου. Να αποδείξετε ότι τα μαύρα τρίγωνα είναι πάντα περισσότερα κατά δύο από τα άσπρα τρίγωνα.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Η προς απόδειξη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad (1)$$

Όμως ισχύουν οι προφανείς ανισότητες:

$$x+y \le \sqrt{2(x^2+y^2)} \quad (2) \qquad\qquad x^2-xy+y^2 > \frac{x^2+y^2}{2} > 0 \quad (3)$$

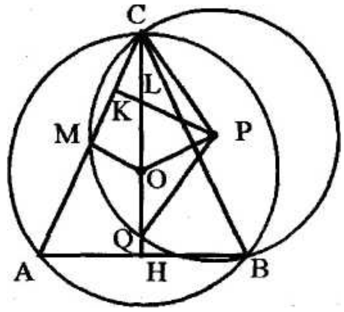
αφού οι x και y δεν είναι και οι δύο 0, από τις οποίες λαμβάνουμε

$$0 < \frac{1}{x^2-xy+y^2} \le \frac{2}{x^2+y^2} \qquad (4)$$

Από τις (2) και (4) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε την αμέσως (1).

Πρόβλημα 2

Έστω P και O τα περίκεντρα των τριγώνων BCM και ABC, αντίστοιχα. Έστω K το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος MC. Επειδή είναι AB=AC, το O βρίσκεται πάνω στο ύψος CH του τριγώνου ABC. Επιπλέον PC=PM ως ακτίνες του ιδίου κύκλου, οπότε θα είναι PK $\perp$ MC , αφού η PK είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου PMC. Όμως είναι και OM $\perp$ AC, οπότε θα είναι PK // OM και K μέσον του OC και CL=LO.



Έχουμε ακόμη ότι OP $\perp$ BC, οπότε $\angle$LOP=90° – $\angle$BCH = 90° $-\frac{\hat{C}}{2}$. Όμως είναι και

$\angle$OLP=$\angle$CLK= 90° $-\frac{\hat{C}}{2}$, οπότε θα έχουμε $\angle$LOP=$\angle$OLP $\Rightarrow$ PO = PL.

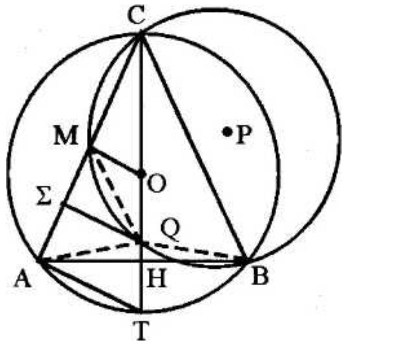
Επίσης θα έχουμε και 180° –$\angle$LOP = 180° –$\angle$OLP $\Rightarrow$ $\angle$CLP=$\angle$POQ. Επιπλέον από PC=PQ $\Rightarrow$ $\angle$PCL=$\angle$PQO. Επομένως τα τρίγωνα CLP και POQ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και CL=OQ.

Άρα έχουμε: $R = CO = 2CL = \frac{2}{3}CQ = \frac{2m}{3}$

Δεύτερος τρόπος

Έστω ότι η προέκταση του ύψους AH τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC στο T. Τότε θα είναι AT $\perp$ CA, αφού η CT είναι διάμετρος. Επιπλέον OM $\perp$ CA, οπότε το τετράπλευρο OMAT είναι τραπέζιο.

Επειδή η CT είναι μεσοκάθετη της AB θα έχουμε QA = QB. Όμως QB = QM,. αφού η AH είναι και διχοτόμος της γωνίας ACB. Άρα το Q είναι το περίκεντρο του τριγώνου ABM, οπότε η κάθετη από το Q προς την πλευρά AM θα περνάει από το μέσον αυτής, έστω το Σ. Τότε στο τραπέζιο OMAT η QΣ είναι διάμεσος, οπότε QO=QT.



Άρα έχουμε $m = CQ = CO + OQ = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$, δηλαδή είναι $R = \frac{2m}{3}$

Πρόβλημα 3.

Έστω $3x + 4y = m^2$ και $4x + 3y = n^2$ (1)

Τότε $7(x + y) = m^2 + n^2 \Rightarrow 7 \mid m^2 + n^2$ (2)

Θεωρώντας $m = 7k + r$, $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ βρίσκουμε ότι

$m^2 \equiv u(\text{mod } 7)$, $u \in \{0,1,2,4\}$,

$n^2 \equiv u(\text{mod } 7)$, $\upsilon \in \{0,1,2,4\}$. Επομένως έχουμε

$m^2 + n^2 = 0(\text{mod } 7)$, όταν $u = \upsilon = 0$ ή $m^2 + n^2 \equiv w(\text{mod } 7^2)$, $w \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Όμως από την (2) έχουμε ότι $m^2 + n^2 \equiv 0(\text{mod } 7)$, οπότε θα πρέπει

$u = \upsilon = 0$ και τότε $m^2 + n^2 \equiv 0(\text{mod } 7^2) \Rightarrow 7(x + y) \equiv 0(\text{mod } 7^2)$

$\Rightarrow x + y \equiv 0(\text{mod} 7)$ (3)

Από την (1) έχουμε ακόμη ότι $x - y = n^2 - m^2$ και $n^2 - m^2 \equiv 0(\text{mod } 7^2)$,

αφού $u = \upsilon = 0$, οπότε θα είναι και

$x - y \equiv 0(\text{mod } 7)$ (4)

Από τις (3) και (4) έπεται ότι

$x + y = 7k$, $x - y = 7\ell$, $k \in \mathbb{Z}_+^*$, $\ell \in \mathbb{Z}$, οπότε θα έχουμε

$2x = 7(k + \ell)$, $2y = 7(k - \ell)$.

Επομένως θα έχουμε ότι $7 \mid 2x$ και $7 \mid 2y$, και αφού $(7,2) = 1$,

θα έχουμε ότι $7 \mid x$ και $7 \mid y$.

Πρόβλημα 4.

Συμβολίζουμε με b, r, w τον αριθμό των μαύρων, κόκκινων και άσπρων τριγώνων, αντίστοιχα. Από τον διαμερισμό του κυρτού πολυγώνου σε τρίγωνα που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων αυτών ισούται με το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου, οπότε θα έχουμε

$$b\pi + r\pi + w\pi = (n - 2)\pi \Leftrightarrow b + r + w = n - 2 \qquad (1)$$

Επίσης, κάθε πλευρά του πολυγώνου είναι πλευρά και ενός από τα οριζόμενα τρίγωνα. Όμως τα μαύρα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους που είναι και πλευρές του πολυγώνου, ενώ τα κόκκινα τρίγωνα έχουν μόνο μία πλευρά τους που είναι και πλευρά του πολυγώνου. Άρα έχουμε

$$2b + r = n \qquad (2)$$

με αφαίρεση της (1) από τη (2) προκύπτει ότι $b - w = 2$.