Διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού
της Γ΄ Λυκείου
Ύλη: Έως τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

Θέμα Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in A$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν για μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Α που αποτελείται από ένωση διαστημάτων, είναι παραγωγίσιμη στο Α και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Α, τότε η f είναι σταθερή στο Α».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
α) Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν (όλες) οι υποθέσεις του θεωρήματος.
β) Μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, υπάρχει το πολύ μια ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$.
γ) $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$
δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 2, τότε $[f(2)]' = f'(2)$.
ε) Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό.

μονάδες 10

Θέμα Β

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(1,0)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = f(x^2+1) - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε το πρόσημο της f.

μονάδες 3

Β2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες.

μονάδες 3

Β3. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

μονάδες 5

Β4. Να δείξετε ότι η g παρουσιάζει μέγιστο, του οποίου να βρείτε τη θέση.

μονάδες 4

Β5. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $f(\alpha^2+1) + f(\beta^2+1) \geq 0$.

μονάδες 5

Β6. Αν $f(x) = -x+1$, να βρείτε τη g και να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι
$f(x)+2f'(x)+\left(e^{-x}+1\right)f''(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=0$ και $f'(0)=\frac{1}{2}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(e^{x}+1\right)f(x)-e^{x}+1$ είναι σταθερή.

μονάδες 7

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$.

μονάδες 2

Γ3. Να γράψετε την f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων.

μονάδες 4

Γ4. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

μονάδες 5

Γ5. Αν $x>0$, να λύσετε την εξίσωση $(x-1)\left(e^{1-x}+1\right)-(x+1)\left(e^{1-x}-1\right)=0$.

μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $xf'(x)+\eta\mu x=x\sigma\upsilon\nu x+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(-\pi)=f(\pi)=0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x$.

μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x=2x-1$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

μονάδες 5

Δ3. Χωρίς τη χρήση του θεωρήματος De L' Hospital, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-1}{2x-\pi}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{xf(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x^{2}}$

μονάδες 2+2+2

Δ4. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ είναι $\left|f(\beta)-f(\alpha)\right|\le\left|\beta-\alpha\right|$

μονάδες 4

Δ5. Υλικό σημείο $M(x,y)$, $x\in(0,\pi)$, κινείται επί της C_f και απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ταχύτητα 0,5 μονάδες μήκους ανά δευτερόλεπτο. Έστω Κ, Λ οι προβολές του Μ στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ΟΚΜΛ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$.

μονάδες 4

Καλή τύχη!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1 \ , & x<0\\ 1 \ , & x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Α4. α) Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1. Επειδή η f διέρχεται από τα σημεία Α και Β ισχύει ότι $f(-1)=2$ και $f(1)=0$.

Επειδή $f(-1)>f(1)$ και η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x<1\overset{\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$ και για κάθε $x>1\overset{\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$.

Β2. Για $x=0$ είναι $g(0)=f(1)-2=-2$, οπότε η C_g τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $\Gamma(0,-2)$.

$g(x)=0\Leftrightarrow f(x^2+1)-2=0\Leftrightarrow f(x^2+1)=2\Leftrightarrow f(x^2+1)=f(-1)\overset{\nearrow}{\Leftrightarrow}x^2+1=-1\Leftrightarrow x^2=-2$ αδύνατη, οπότε η C_g δεν τέμνει τον άξονα x΄x.

Β3. Έστω $x_1<x_2<0$, τότε $x_1^2>x_2^2\Leftrightarrow x_1^2+1>x_2^2+1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x_1^2+1)<f(x_2^2+1)\Leftrightarrow$

$f(x_1^2+1)-2<f(x_2^2+1)-2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow g\nearrow(-\infty,0)$.

Έστω $0\le x_1<x_2$, τότε $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow x_1^2+1<x_2^2+1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x_1^2+1)>f(x_2^2+1)\Leftrightarrow$

$f(x_1^2+1)-2>f(x_2^2+1)-2\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow g\searrow[0,+\infty)$.

B4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 1 \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^2+1\right) \leq f(1)=0 \Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)-2 \leq -2 \Leftrightarrow$

$g(x) \leq -2 \Leftrightarrow g(x) \leq g(0)$, οπότε η g παρουσιάζει μέγιστο το -2 για $x=0$.

B5. 1ος τρόπος: $f\left(\alpha^2+1\right)+f\left(\beta^2+1\right) \geq 0 \Leftrightarrow f\left(\alpha^2+1\right)-2+f\left(\beta^2+1\right)-2 \geq -4 \Leftrightarrow g(\alpha)+g(\beta) \geq -4$ (1)

Επειδή $g(x) \leq -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $g(\alpha) \leq -2$, $g(\beta) \leq -2$, οπότε $g(\alpha)+g(\beta) \leq -4$.

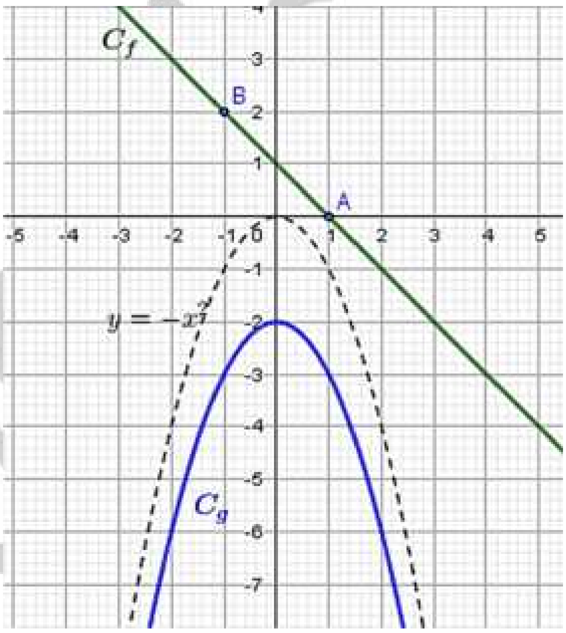
Άρα η (1) ισχύει μόνο όταν $g(\alpha)=g(\beta)=-2 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$

2ος τρόπος: Για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) \leq f(1)=0$, άρα $f\left(\alpha^2+1\right) \leq 0$, $f\left(\beta^2+1\right) \leq 0$ και

$f\left(\alpha^2+1\right)+f\left(\beta^2+1\right) \leq 0$,οπότε $f\left(\alpha^2+1\right)+f\left(\beta^2+1\right)=0$,το οποίο ισχύει μόνο όταν $\alpha=\beta=0$.

B6. $g(x)=f\left(x^2+1\right)-2=-\left(x^2+1\right)+1-2=-x^2-2$.

Η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B και η γραφική παράσταση της g είναι μεταφορά της παραβολής $y=-x^2$ κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.



Θέμα Γ

Γ1. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=e^x f(x)+\left(e^x+1\right)f'(x)-e^x$.

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g''(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)+e^x f'(x)+\left(e^x+1\right)f''(x)-e^x \Leftrightarrow$

$g''(x)=e^x f(x)+2e^x f'(x)+\left(e^x+1\right)f''(x)-e^x$

Είναι $f(x)+2f'(x)+\left(e^{-x}+1\right)f''(x)=1 \Leftrightarrow f(x)+2f'(x)+\left(\dfrac{1}{e^x}+1\right)f''(x)=1 \Leftrightarrow$

$f(x)+2f'(x)+\dfrac{1+e^x}{e^x}f''(x)=1 \Leftrightarrow e^x f(x)+2e^x f'(x)+\left(1+e^x\right)f''(x)=e^x$, οπότε

$g''(x)=e^x-e^x=0 \Leftrightarrow g'(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$.

Είναι $g'(0)=f(0)+2f'(0)-1=2\cdot\dfrac{1}{2}-1=0 \Leftrightarrow c=0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$g'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=c'$, $c' \in \mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $g(0)=2f(0)=0 \Leftrightarrow c'=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow$

$\left(e^x+1\right)f(x)-e^x+1=0 \Leftrightarrow \left(e^x+1\right)f(x)=e^x-1 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

2ος τρόπος

$f(x)+2f'(x)+\left(e^{-x}+1\right)f''(x)=1\Leftrightarrow f(x)+2f'(x)+\left(\dfrac{1}{e^x}+1\right)f''(x)=1\Leftrightarrow$

$f(x)+2f'(x)+\dfrac{1+e^x}{e^x}f''(x)=1\Leftrightarrow e^xf(x)+2e^xf'(x)+\left(1+e^x\right)f''(x)=e^x\Leftrightarrow$

$e^xf(x)+e^xf'(x)+e^xf'(x)+e^xf''(x)+f''(x)=e^x\Leftrightarrow\left(e^xf(x)+e^xf'(x)+f'(x)\right)'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow$

$e^xf(x)+e^xf'(x)+f'(x)=e^x+c_1, c_1\in\mathbb{R}.$.

Για $x=0$ έχουμε $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+c_1\Leftrightarrow c_1=0$ οπότε

$e^xf(x)+e^xf'(x)+f'(x)=e^x\Leftrightarrow\left(e^xf(x)+f(x)\right)'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow e^xf(x)+f(x)=e^x+c_2, c_2\in\mathbb{R}.$

Για $x=0$ έχουμε $0=1+c_2\Leftrightarrow c_2=-1$ οπότε

$e^xf(x)+f(x)=e^x-1\Leftrightarrow f(x)\left(e^x+1\right)=e^x-1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}.$

Γ3. Έστω $a(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\neq-1$ και $b(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Για την συνάρτηση $a\circ b$ ισχύει ότι: $\begin{cases}x\in D_b\\ b(x)\in D_a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ e^x\neq-1 \text{ ισχύει}\end{cases}$, άρα $D_{a\circ b}=\mathbb{R}$ και

$(a\circ b)(x)=a(b(x))=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$.

Γ4. Είναι $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{e^x+1-2}{e^x+1}=1-\dfrac{2}{e^x+1}$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}+1<e^{x_2}+1\Leftrightarrow\dfrac{1}{e^{x_1}+1}>\dfrac{1}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow$

$\dfrac{-2}{e^{x_1}+1}<\dfrac{-2}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow 1-\dfrac{2}{e^{x_1}+1}<1-\dfrac{2}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1−1 οπότε η f αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(1-e^{-x}\right)}{e^x\left(1+e^{-x}\right)}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(-1,1)$, οπότε $D_{f^{-1}}=(-1,1)$.

$f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^x-1=ye^x+y\Leftrightarrow e^x-ye^x=y+1\Leftrightarrow e^x(1-y)=1+y\overset{y\in(-1,1)}{\Leftrightarrow}$

$e^x=\dfrac{1+y}{1-y}\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1+y}{1-y}$, άρα $f^{-1}(y)=\ln\dfrac{1+y}{1-y}$, $y\in(-1,1)$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $x\in(-1,1)$.

Γ5. $(x-1)\left(e^{1-x}+1\right)-(x+1)\left(e^{1-x}-1\right)=0\Leftrightarrow(x+1)\left(e^{1-x}-1\right)=(x-1)\left(e^{1-x}+1\right)\Leftrightarrow\dfrac{e^{1-x}-1}{e^{1-x}+1}=\dfrac{x-1}{x+1}\Leftrightarrow$

$f(1-x)=\dfrac{e^{\ln x}-1}{e^{\ln x}+1}\Leftrightarrow f(1-x)=f(\ln x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}1-x=\ln x\Leftrightarrow 1-x-\ln x=0$

Έστω $h(x)=1-x-\ln x$, $x>0$. Παρατηρούμε ότι $h(1)=0$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $-x_1>-x_2\Leftrightarrow 1-x_1>1-x_2$ (3) και

$\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow-\ln x_1>-\ln x_2$ (4). Από $(3)+(4)\Rightarrow h(x_1)>h(x_2)\Leftrightarrow h\searrow(0,+\infty)\Rightarrow h$ 1−1 .

Τότε $1-x-\ln x=0 \Leftrightarrow h(x)=h(1) \overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=1$

Θέμα Δ

Δ1. $xf'(x)+\eta\mu x=x\sigma\upsilon\nu x+f(x) \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2} \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)'$ (1)

Για κάθε $x<0$ είναι $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\eta\mu x}{x}+c_1 \Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x+c_1x,\ c_1\in\mathbb{R}$ και για κάθε $x>0$ είναι $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\eta\mu x}{x}+c_2 \Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x+c_2x,\ c_2\in\mathbb{R}$. Επειδή $f(-\pi)=f(\pi)=0$, είναι $c_1=c_2=0$ οπότε $f(x)=\eta\mu x,\ x\neq 0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x=0$, οπότε

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, οπότε $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ και τελικά $f(x)=\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$

Δ2. $\eta\mu x=2x-1 \Leftrightarrow \eta\mu x-2x+1=0$

Έστω $g(x)=\eta\mu x-2x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\eta\mu x-2x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}-2+\dfrac{1}{x}\right)\right]=-\infty(0-2+0)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\eta\mu x-2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}-2+\dfrac{1}{x}\right)\right]=+\infty(0-2+0)=-\infty$ γιατί

για $x\neq 0$ είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\leq\dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|}\leq\dfrac{\eta\mu x}{x}\leq\dfrac{1}{|x|}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

Επειδή η g είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της g, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<x_2$. τότε:

Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-2$ και $g(x_1)=g(x_2)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$g'(x_0)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_0-2=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_0=2$ άτοπο. Άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=2x-1$ έχει μοναδική ρίζα.

Δ3. α) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\eta\mu x-1}{2x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

γιατί $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x^2}{xf(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x^2\,\dfrac{1}{x\eta\mu x}\right)$

Αν $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ είναι $x<0,\ \eta\mu x<0\Rightarrow x\eta\mu x>0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\ln x^2=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}x\eta\mu x=0$,

είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln x^2}{xf(x)}=-\infty(+\infty)=-\infty$

Αν $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $x>0,\ \eta\mu x>0\Rightarrow x\eta\mu x>0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x^2=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}x\eta\mu x=0$,

είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln x^2}{xf(x)}=-\infty(+\infty)=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x^2}{xf(x)}=-\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right]=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

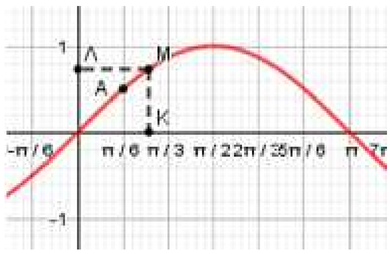
Δ4. Αν $\alpha=\beta$ τότε $|f(\alpha)-f(\alpha)|\le|\alpha-\alpha|\Leftrightarrow 0\le 0$ ισχύει.

Αν $\alpha<\beta$, τότε λόγω του Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Όμως $|\sigma\upsilon\nu\xi|\le 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|\le 1\Leftrightarrow\dfrac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{|\beta-\alpha|}\le 1\Leftrightarrow\ |f(\beta)-f(\alpha)|\le|\beta-\alpha|$

Ομοίως αν $\alpha>\beta$.



Δ5. Έστω $M(x(t),y(t))$ με $y(t)=f(x(t))=\eta\mu x(t)$

Είναι $(OKM\Lambda)=x(t)y(t)=x(t)\eta\mu x(t)$

Έστω $E(t)=x(t)\eta\mu x(t),\ t\ge 0$

Είναι $E'(t)=x'(t)\eta\mu x(t)+x(t)\sigma\upsilon\nu x(t)x'(t)$

Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ διέρχεται από το Α, είναι

$E'(t_0)=x'(t_0)\eta\mu x(t_0)+x(t_0)\sigma\upsilon\nu x(t_0)x'(t_0)=\dfrac{1}{2}\eta\mu\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\pi\sqrt{3}}{24}=\dfrac{6+\pi\sqrt{3}}{24}$ μ.μ.^{2} / sec