Θεωρία Μιγαδικών

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες

α) Αν z_1 , $z_2 \in \mathbb{C}$,τότε : $z_1^2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 0$

β) $i^{\nu} = 1 \Leftrightarrow \nu = 4\kappa,\ \nu, \kappa \in \mathbb{N}$

γ) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $\text{Re}(z_1 + z_2) = 0$, τότε $\text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2) = 0$.

δ) Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha,\ \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$ έχει ρίζα τον $2+i$ θα έχει και τον $\frac{5}{2+i}$.

ε) Η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0,\ \alpha,\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$,έχει πάντοτε λύση στο $\mathbb{C}$.

στ) $z^2 \geq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

ζ) $\text{Re}(z\overline{w}) = \text{Re}(\overline{z}w)$ για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$.

2. α) Πως ορίζεται το μέτρο μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$;

β) Να αναγνωρίσετε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $|z - z_1| = |z - z_2|$

ii. $|z - z_0| = \rho$

iii. $|z - z_1| + |z - z_2| = 2\alpha$ όπου z_1, z_2 γνωστοί μιγαδικοί, $\alpha > 0$ και $|z_1 - z_2| < 2\alpha$.

3. α) Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

β) Να αποδείξετε ότι $\overline{(z^{\nu})} = (\overline{z})^{\nu}$, $z \in \mathbb{C}$