23η Άσκηση

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda x^3-\lambda(1+2\lambda)x^2+\lambda^2(2-3\lambda)x+3\lambda^3,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$.

Αν το $P(x)$ έχει ρίζα για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ, τότε:

α) να βρείτε τη ρίζα.

β) να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες του.

Έστω $\lambda=1$

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{P(x)}$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{2x-6}{P(x)}>\dfrac{x}{x-1}$.

ε) Να δείξετε ότι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)=x^4+2x^3+3x^2-5x+24$ δεν έχουν κοινή ρίζα.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^3x+3\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu x=0$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Επειδή το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ, η εξίσωση $P(x)=0$ έχει ως προς λ άπειρες λύσεις. Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow$

$\lambda x^3-\lambda x^2-2\lambda x^2+2\lambda^2 x-3\lambda^3 x+3\lambda^3=0 \Leftrightarrow 3\lambda^3(1-x)+2\lambda^2 x(1-x)+\lambda x^2(x-1)=0$ (1)

Η (1) αληθεύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$ μόνο όταν ως προς λ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, δηλαδή όταν:

$$\begin{cases}1-x=0\\ x(1-x)=0\\ x^2(x-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1 .$$

β) $3\lambda^3(1-x)+2\lambda^2 x(1-x)+\lambda x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow (1-x)\left(3\lambda^3+2\lambda^2 x-\lambda x^2\right)=0 \Leftrightarrow$

$x=1$ ή $3\lambda^3+2\lambda^2 x-\lambda x^2=0 \Leftrightarrow -\lambda\left(x^2-2\lambda x-3\lambda^2\right)=0 \Leftrightarrow x^2-2\lambda x-3\lambda^2=0$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta=4\lambda^2+12\lambda^2=16\lambda^2>0$ και $x=-\lambda$ ή $x=3\lambda$

γ) Για $\lambda=1$ είναι $P(x)=x^3-3x^2-x+3=(x-1)(x+1)(x-3)$

Για να ορίζεται η f πρέπει $P(x)\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-3)\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$ ή $x\ge 3$

x	$-\infty$ -1	1	3	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Άρα $D_f=[-1,1]\cup[3,+\infty)$

δ) $\dfrac{2x-6}{P(x)}>\dfrac{x}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{2(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-3)}-\dfrac{x}{x-1}>0$

Για $x\ne 3$ η τελευταία ανίσωση γίνεται: $\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{x}{x-1}>0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x(x+1)}{(x-1)(x+1)}>0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{-x^2-x+2}{(x-1)(x+1)}>0 \Leftrightarrow \dfrac{-\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}>0 \overset{x\ne 1}{\Leftrightarrow} -(x+2)(x+1)>0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)<0 \Leftrightarrow x\in(-2,-1)$

x	$-\infty$ -2	-1	$+\infty$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$
γινόμενο	$+$	$-$	$+$

ε) Επειδή το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τα -1, 1 και 3, αν έχει κοινή ρίζα με το $Q(x)$ θα είναι κάποιος από αυτούς τους τρείς αριθμούς. Είναι $Q(1)=1+2+3-5+24=25\ne 0$,

$Q(-1)=1-2+3+5+24=31\ne 0$ και $Q(3)=81+54+27-15+24=171\ne 0$ οπότε τα δύο πολυώνυμα δεν έχουν κοινή ρίζα.

στ) $ημ^3x + 3συν^2x - ημx = 0 \Leftrightarrow ημ^3x + 3\left(1 - ημ^2x\right) - ημx = 0 \Leftrightarrow$

$ημ^3x + 3 - 3ημ^2x - ημx = 0 \Leftrightarrow P\left(ημx\right) = 0 \Leftrightarrow ημx = 1$ ή $ημx = -1$ ή $ημx = 3$ αδύνατη

$\left(ημx = 1 \Leftrightarrow x = 2κπ + \dfrac{π}{2},\ κ \in \mathbb{Z}\right)$ ή $\left(ημx = -1 \Leftrightarrow x = 2κπ - \dfrac{π}{2},\ κ \in \mathbb{Z}\right)$