Επαναληπτικές ασκήσεις στα Όρια συναρτήσεων

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Αποστόλης Κακαβάς – Στέλιος Μιχαήλογλου

Εκφωνήσεις

1. Έστω για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ σε μία περιοχή του 0 ισχύει:

$$2+x^3\eta\mu\frac{1}{x}\le f(x)\le\frac{\sqrt{1+\varepsilon\varphi 2x}-\sqrt{1-\varepsilon\varphi 2x}}{\eta\mu x}$$

Α. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

Β. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f(x-1)=f(x)$ να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

Γ. Αν επιπλέον ισχύει ότι: $2+x^3\eta\mu\frac{1}{x}\le f(x)$ και σε μια περιοχή του $+\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f(x))^4+(f(x))^2=x^2$,για κάθε $x\in\mathbb{R}\,(1)$.

Α. Να δειχθεί ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β. Να δειχθεί ότι η C_f δεν βρίσκεται πάνω ή κάτω από τις διχοτόμους των αξόνων.

Γ. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

3. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

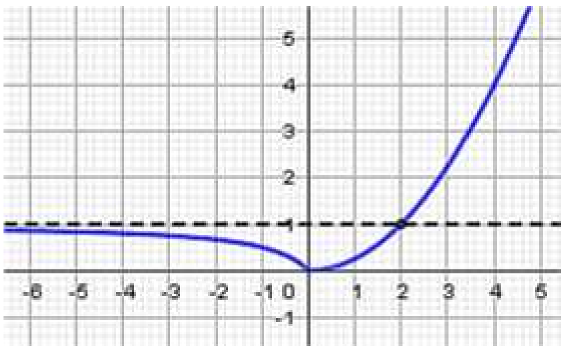
Α. $\lim\limits_{x\to -\infty}(2(\eta\mu\lambda)x+\sqrt{x^2+1})$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in(0,\pi)$.

Β. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(\eta\mu\alpha)x^2-\sqrt{\alpha^2x^4+4}}{x+\sigma\upsilon\nu x}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in[-\pi,\pi]$.

4. Με δεδομένο ότι $e^{\alpha}\ge\alpha+1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=0$ να υπολογιστεί το όριο

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{\alpha x}-(\alpha+1)^x}{\alpha^x+2^{x+1}}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha>0$.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{f(x)}$

β) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f^2(x)-3f(x)+2}{f^2(x)-1}$

γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{f^2(x)-f(x)}-f(x)\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|f(x)-x|-x+1}{\sqrt{f(x)}-1}$

ε) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(e^{-f(-x)}\eta\mu\frac{1}{f(x)-1}\right)$

στ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln\left(e^{f(x)}+1\right)-f(x)\right]$

6. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f\left(x^2\right)=|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η $f(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+\sqrt[3]{f^2(x)}}{x-1}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{f\left(x^2+x\right)}-e^{f\left(x^2\right)}\right)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x^2-4x+4\right)}{f(x+2)-f(3x-2)}$

δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+e^{-f(x)}$ έχει ελάχιστο το 2. Ποια είναι η θέση του ακρότατου;

ε) Αν $h^2(x)-4h(x)\leq f\left(x^4\right)-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η h είναι συνεχής στο $x_0=0$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}=0$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(f\left(f(x)\right)\right)}{x}=0$

β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν), τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2-2x\eta\mu x+\eta\mu^2 x}$

γ) Αν για συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει ότι $g^2(x)-f^2(x)+1\leq 2g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε τη τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Έστω $\lambda=2$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια: **i.** $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ και **ii.** $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x)=(x+1)f(x)$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{g(x)}-1}{x+1}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{g(x)}+\sqrt[3]{g(x)}-2}{x+1}$

iii. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^{g(x)}+3^{g(x)}-1}{4^{g(x)}+5}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln\left(e^{g(x)}+1\right)-x\right]$

1η Άσκηση

Έστω για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ σε μία περιοχή του 0 ισχύει:

$$2+x^3ημ\frac{1}{x}\le f(x)\le\frac{\sqrt{1+εφ2x}-\sqrt{1-εφ2x}}{ημx}$$

Α. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$.

Β. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f(x-1)=f(x)$ να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

Γ. Αν επιπλέον ισχύει ότι: $2+x^3ημ\frac{1}{x}\le f(x)$ και σε μια περιοχή του $+\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Λύση

Α. $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+εφ2x}-\sqrt{1-εφ2x}}{ημx}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+εφ2x}-\sqrt{1-εφ2x})(\sqrt{1+εφ2x}+\sqrt{1-εφ2x})}{ημx(\sqrt{1+εφ2x}+\sqrt{1-εφ2x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+εφ2x})^2-(\sqrt{1-εφ2x})^2}{ημx(\sqrt{1+εφ2x}+\sqrt{1-εφ2x})}=\lim_{x\to0}\frac{2εφ2x}{ημx(\sqrt{1+εφ2x}+\sqrt{1-εφ2x})}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{2ημ2x}{συν2x}}{ημx(\sqrt{1+εφ2x}+\sqrt{1-εφ2x})}=\lim_{x\to0}\frac{4x\frac{ημ2x}{2x}\frac{1}{συν2x}}{x\frac{ημx}{x}(\sqrt{1+εφ2x}+\sqrt{1-εφ2x})}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{4\frac{ημ2x}{2x}\frac{1}{συν2x}}{\frac{ημx}{x}(\sqrt{1+εφ2x}+\sqrt{1-εφ2x})}=\frac{4\cdot1\cdot1}{1(1+1)}=2\ (1)$$

$$\left|x^3ημ\frac{1}{x}\right|=\left|x^3\right|\left|ημ\frac{1}{x}\right|\le\left|x^3\right|\cdot1=\left|x^3\right|\Rightarrow-\left|x^3\right|\le x^3ημ\frac{1}{x}\le\left|x^3\right|$$

$\lim\limits_{x\to0}(-\left|x^3\right|)=\lim\limits_{x\to0}\left|x^3\right|=0$. Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to0}(x^3ημ\frac{1}{x})=0\Rightarrow\lim_{x\to0}(2+x^3ημ\frac{1}{x})=2\ \ (2)$$

$$(1),(2)\overset{\text{Κριτήριο Παρεμβολής}}{\Rightarrow}\lim_{x\to0}f(x)=2.$$

Β. $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}f(x)=2\overset{f(x)=f(x-1)}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to0}f(x-1)=2\\ u=x-1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}u=\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{u\to-1}f(u)=2\Rightarrow\lim_{x\to-1}f(x)=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}f(x)=2\Rightarrow\lim\limits_{v\to0}f(v)=2\\ v=x-1\Rightarrow x=v+1\Rightarrow\lim\limits_{v\to0}x=\lim\limits_{v\to0}(v+1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to1}f(x-1)=2$$

$$\overset{f(x-1)=f(x)}{\Rightarrow}\lim_{x\to1}f(x)=2$$

Γ. Έχουμε: $2+x^3\eta\mu\frac{1}{x}\le f(x)$ σε μια περιοχή του $+\infty$ και

$$u=\frac{1}{x}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to+0}\frac{\eta\mu u}{u}=1\ (3)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(2+x^3\eta\mu\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}(2+x^2\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}})\overset{(3)}{=}2+(+\infty)\cdot1=+\infty$$ Άρα και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2η Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\left(f(x)\right)^4+\left(f(x)\right)^2=x^2$,για κάθε $x\in\mathbb{R}\,(1)$.

A. Να δειχθεί ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

B. Να δειχθεί ότι η C_f δεν βρίσκεται πάνω ή κάτω από τις διχοτόμους των αξόνων.

Γ. Να βρεθεί το $\lim_{x\to0}f(x)$.

Λύση

A. Η (1) για $x=0$ γίνεται: $(f(0))^4+(f(0))^2=0\Leftrightarrow(f(0))^2[(f(0))^2+1]=0\overset{(f(0))^2+1\neq0}{\Leftrightarrow}(f(0))^2=0\Leftrightarrow f(0)=0.$

Άρα η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

B. Έχουμε για καθε $x\in\mathbb{R}$: $\left(f(x)\right)^4+\left(f(x)\right)^2=x^2\Rightarrow\left(f(x)\right)^2\left[\left(f(x)\right)^2+1\right]=x^2\Rightarrow$

$$\left(f(x)\right)^2=\frac{x^2}{\left(f(x)\right)^2+1}\le x^2\Rightarrow\left(f(x)\right)^2\le x^2\Rightarrow|f(x)|\le|x|\overset{x\neq0}{\Rightarrow}-|x|\le f(x)\le|x|$$

- Αν $x>0$ τότε: $-x\le f(x)\le x\Rightarrow$ για $x>0$ η C_f δεν είναι πάνω από την $y=x$ ούτε κάτω από την $y=-x$.
- Αν $x<0$ τότε: $x\le f(x)\le -x\Rightarrow$ για $x<0$ η C_f δεν είναι πάνω από την $y=-x$ ούτε κάτω από την $y=x$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η C_f δεν βρίσκεται πάνω ή κάτω από τις διχοτόμους των αξόνων.

Γ. Έχουμε ότι: $-|x|\le f(x)\le|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
Όπότε και σε οποιαδήποτε γειτονιά του 0
ισχύει: $-|x|\le f(x)\le|x|$
και $\lim_{x\to0}\left(-|x|\right)=\lim_{x\to0}|x|=0$

$\overset{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow}\lim_{x\to0}f(x)=0$

3η Άσκηση

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

A. $\lim_{x\to-\infty}(2(\eta\mu\lambda)x+\sqrt{x^2+1})$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in(0,\pi)$.

B. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\eta\mu\alpha)x^2-\sqrt{\alpha^2x^4+4}}{x+\sigma\upsilon\nu x}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in[-\pi,\pi]$.

Λύση

Α. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2(\eta\mu\lambda)x+\sqrt{x^2+1})=\lim\limits_{x\to-\infty}(2(\eta\mu\lambda)x+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})})=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2(\eta\mu\lambda)x+|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})})=\lim\limits_{x\to-\infty}(2(\eta\mu\lambda)x-x\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})})=\lim\limits_{x\to-\infty}[x(2(\eta\mu\lambda)-\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})})]$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2(\eta\mu\lambda)-\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}\right]=2\eta\mu\lambda-1$, οπότε:

- Αν $2\eta\mu\lambda-1>0\Leftrightarrow\lambda\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$ τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2(\eta\mu\lambda)x+\sqrt{x^2+1})=-\infty$
- Αν $2\eta\mu\lambda-1<0\Leftrightarrow\lambda\in(0,\frac{\pi}{6})\cup(\frac{5\pi}{6},\pi)$ τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2(\eta\mu\lambda)x+\sqrt{x^2+1})=+\infty$.
- Αν $2\eta\mu\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{\pi}{6}$ ή $\lambda=\frac{5\pi}{6}$ τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2(\eta\mu\lambda)x+\sqrt{x^2+1})=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{(x-\sqrt{x^2+1})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}==\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x+x\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}=0\cdot\frac{1}{2}=0$

Β. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\eta\mu\alpha)x^2-\sqrt{\alpha^2x^4+4}}{x+\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\eta\mu\alpha)x^2-\sqrt{x^4(\alpha^2+\frac{4}{x^4})}}{x+\sigma\upsilon\nu x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\eta\mu\alpha)x^2-x^2\sqrt{\alpha^2+\frac{4}{x^4}}}{x(1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}[x\frac{(\eta\mu\alpha)-\sqrt{\alpha^2+\frac{4}{x^4}}}{(1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x})}]$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\eta\mu\alpha)-\sqrt{\alpha^2+\frac{4}{x^4}}}{(1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x})}=\eta\mu\alpha-|\alpha|$ (1) γιατί

$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right|$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\left|\frac{1}{x}\right|)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\right|=0$ και από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

- Αν $\alpha\neq0\Leftrightarrow\alpha\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ τότε : $|\eta\mu\alpha|<|\alpha|\Leftrightarrow-|\alpha|<\eta\mu\alpha<|\alpha|$ οπότε

$\eta\mu\alpha-|\alpha|<0\,(2)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\eta\mu\alpha)x^2-\sqrt{\alpha^2x^4+4}}{x+\sigma\upsilon\nu x}\overset{(1),(2)}{=}-\infty$.

- Αν $\alpha=0$ τότε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\eta\mu\alpha)x^2-\sqrt{\alpha^2x^4+4}}{x+\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x+\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x(1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{-2}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}}]=0$.

4η Άσκηση

Με δεδομένο ότι $e^{\alpha} \geq \alpha+1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=0$ να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\alpha x}-(\alpha+1)^x}{\alpha^x+2^{x+1}}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha>0$.

Λύση

Επειδή $e^{\alpha} \geq \alpha+1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=0$, έχουμε ότι $\forall \alpha>0$ ισχύει $e^{\alpha}>\alpha+1 \Leftrightarrow 0<\dfrac{\alpha+1}{e^{\alpha}}<1$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha+1}{e^{\alpha}}\right)^x=0\,(1)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\alpha x}-(\alpha+1)^x}{\alpha^x+2^{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\alpha x}[1-(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}})^x]}{\alpha^x+2^{x+1}}$.

• Αν $\alpha>2 \Leftrightarrow 0<\dfrac{2}{\alpha}<1$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)^x=0\,(2)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}[1-(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}})^x]}{\alpha^x+2^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}[1-(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}})^x]}{\alpha^x(1+2(\frac{2}{\alpha})^x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^x}\cdot\frac{[1-(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}})^x]}{(1+2(\frac{2}{\alpha})^x)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\alpha}}{\alpha}\right)^x\cdot\frac{[1-(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}})^x]}{(1+2(\frac{2}{\alpha})^x)}\overset{(1),(2)}{=}(+\infty)\cdot\frac{1-0}{1+2\cdot 0}=+\infty.\{\text{γιατί } e^{\alpha}>\alpha+1>\alpha\Rightarrow\frac{e^{\alpha}}{\alpha}>1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\alpha}}{\alpha}\right)^x=+\infty\}$$

• Αν $\alpha=2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\alpha x}-(\alpha+1)^x}{\alpha^x+2^{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-3^x}{2^x+2^{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-3^x}{3\cdot 2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}(1-(\frac{3}{e^2})^x)}{3\cdot 2^x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^2}{2}\right)^x\frac{(1-(\frac{3}{e^2})^x)}{3}=(+\infty)\cdot\frac{1-0}{3}=+\infty\{\text{γιατί }\frac{e^2}{2}>1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^2}{2}\right)^x=+\infty\text{ και } e^2>3$$

$$\Rightarrow 0<\frac{3}{e^2}<1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{e^2}\right)^x=0\}$$

• Αν $0<\alpha<2 \Leftrightarrow 0<\dfrac{\alpha}{2}<1$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^x=0\,(3)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}[1-(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}})^x]}{\alpha^x+2^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}[1-(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}})^x]}{2^x(1+2(\frac{\alpha}{2})^x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{2^x}\cdot\frac{[1-(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}})^x]}{(1+2(\frac{\alpha}{2})^x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\alpha}}{2}\right)^x\cdot\frac{[1-(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}})^x]}{(1+2(\frac{\alpha}{2})^x)}$$

• Αν $\dfrac{e^{\alpha}}{2}>1 \Leftrightarrow e^{\alpha}>2 \Leftrightarrow \ln 2<\alpha<2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\alpha}}{2}\right)^x=+\infty\,(4)$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\alpha}}{2}\right)^x\cdot\dfrac{[1-(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}})^x]}{(1+2(\frac{\alpha}{2})^x)}\overset{(1),(3),(4)}{=}(+\infty)\cdot\dfrac{1-0}{1+2\cdot 0}=+\infty$

• Αν $\dfrac{e^{\alpha}}{2}=1 \Leftrightarrow e^{\alpha}=2 \Leftrightarrow \alpha=\ln 2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\alpha}}{2}\right)^x\cdot\dfrac{[1-(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}})^x]}{(1+2(\frac{\alpha}{2})^x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[1-(\frac{\ln 2+1}{2})^x]}{(1+2(\frac{\ln 2}{2})^x)}=\dfrac{1-0}{1+2\cdot 0}=1$

• Αν $\frac{e^{α}}{2}<1 \Leftrightarrow e^{α}<2 \Leftrightarrow 0<α<\ln 2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{e^{α}}{2})^{x}=0$ (5)

και $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{e^{α}}{2})^{x}\cdot\frac{[1-(\frac{α+1}{e^{α}})^{x}]}{(1+2(\frac{α}{2})^{x})}\overset{(1),(3),(5)}{=}0\cdot\frac{1-0}{1+2\cdot 0}=0.$

5η Άσκηση

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{f(x)}$

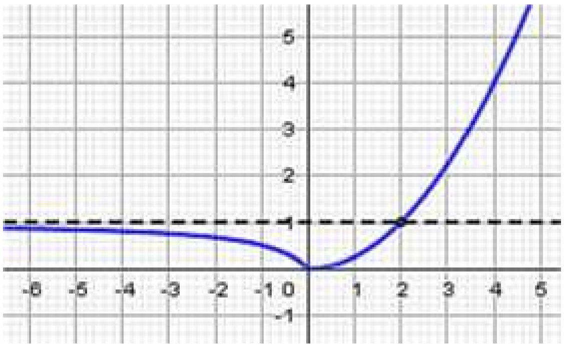
β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f^{2}(x)-3f(x)+2}{f^{2}(x)-1}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^{2}(x)-f(x)}-f(x)\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|f(x)-x|-x+1}{\sqrt{f(x)}-1}$

ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-f(-x)}ημ\frac{1}{f(x)-1}\right)$

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{f(x)}+1\right)-f(x)\right]$



Λύση

α) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}\overset{f(x)=u}{\underset{u\to 0^{+}}{=}}\lim_{u\to 0^{+}}\frac{1}{u}=+\infty \text{ , άρα } \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\left[(x-1)\frac{1}{f(x)}\right]=-1\cdot(+\infty)=-\infty$$

β) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{2}(x)-3f(x)+2}{f^{2}(x)-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{(f(x)-1)}(f(x)-2)}{\cancel{(f(x)-1)}(f(x)+1)}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

γ) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^{2}(x)-f(x)}-f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{f^{2}(x)-f(x)}-f(x)\right)\left(\sqrt{f^{2}(x)-f(x)}+f(x)\right)}{\sqrt{f^{2}(x)-f(x)}+f(x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{f^{2}(x)-f(x)}\right)^{2}-f^{2}(x)}{\sqrt{f^{2}(x)\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)}+f(x)}==\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{f^{2}(x)}-f(x)-\cancel{f^{2}(x)}}{f(x)\sqrt{1-\frac{1}{f^{2}(x)}}+f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{f(x)}}{\cancel{f(x)}\left(\sqrt{1-\frac{1}{f^{2}(x)}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

δ) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)-x\right)=1-2=-1<0$ άρα $f(x)-x<0$ για τιμές του x πολύ κοντά στο 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{|f(x)-x|-x+1}{\sqrt{f(x)}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{x-f(x)-x+1}{\sqrt{f(x)}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{-\left(f(x)-1\right)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}{\left(\sqrt{f(x)}-1\right)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-\left(f(x)-1\right)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}{f(x)-1}=-2$$

ε) $\left|e^{-f(-x)}\eta\mu\frac{1}{f(x)-1}\right|=e^{-f(-x)}\left|\eta\mu\frac{1}{f(x)-1}\right|\le e^{-f(-x)}\cdot 1=e^{-f(-x)} \Leftrightarrow -e^{-f(-x)}\le e^{-f(-x)}\eta\mu\frac{1}{f(x)-1}\le e^{-f(-x)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-f(-x)} \overset{f(-x)=u}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} e^{-u}=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} f(-x) \underset{\omega\to+\infty}{\overset{-x=\omega}{=}} \lim\limits_{\omega\to+\infty} f(\omega)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{-f(-x)}\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-f(-x)}\eta\mu\frac{1}{f(x)-1}\right)=0$

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{f(x)}+1\right)-f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{f(x)}+1\right)-\ln e^{f(x)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{f(x)}+1}{e^{f(x)}}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-f(x)}\right) \underset{u\to+\infty}{\overset{e^{f(x)}=u}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\ln\left(1+e^{-u}\right)=\ln 1=0$

6η Άσκηση

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f\left(x^2\right)=|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η $f(x)=\sqrt{x},\ x\ge 0$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-\sqrt[3]{f^2(x)}}{x-1}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f\left(x^2+x\right)}-e^{f\left(x^2\right)}\right)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f\left(x^2-4x+4\right)}{f(x+2)-f(3x-2)}$

δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+e^{-f(x)}$ έχει ελάχιστο το 2. Ποια είναι η θέση του ακρότατου;

ε) Αν $h^2(x)-4h(x)\le f\left(x^4\right)-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η h είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Λύση

α) Είναι $f\left(x^2\right)=|x|=\sqrt{x^2}$

Θέτουμε $x^2=\omega$ με $\omega\ge 0$, οπότε $f(\omega)=\sqrt{\omega},\ \omega\ge 0$ άρα και $f(x)=\sqrt{x},\ x\ge 0$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση (είναι βασική), οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=y,\ y\ge 0\Leftrightarrow x=y^2$ άρα $f^{-1}(y)=y^2,\ y\ge 0$ οπότε $f^{-1}(x)=x^2,\ x\ge 0$.

γ) i. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-\sqrt[3]{f^2(x)}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\right)^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-1}$

Θέτουμε $\sqrt[6]{x}=\omega$, τότε $\sqrt{x}=\omega^3$, $\sqrt[3]{x}=\omega^2$ και $x=\omega^6$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-1}=\lim_{\omega\to 1}\frac{\omega^3-\omega^2}{\omega^6-1}=\lim_{\omega\to 1}\frac{\omega^2(\omega-1)}{(\omega^3-1)(\omega^3+1)}=\lim_{\omega\to 1}\frac{\omega^2\cancel{(\omega-1)}}{\cancel{(\omega-1)}(\omega^2+\omega+1)(\omega^3+1)}=\frac{1}{6}$$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f(x^2+x)}-e^{f(x^2)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+x}}-e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\frac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{e^x}-1\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^{\sqrt{x^2+x}-x}-1\right)\right]=+\infty$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}\ \text{και}\ \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x^2-4x+4)}{f(x+2)-f(3x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x-2)^2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{3x-2}\right)^2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{x+2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\cancel{(x-2)}}=-2$,

$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\cancel{(x-2)}}=2$, οπότε δεν υπάρχει

το ζητούμενο όριο.

δ) Είναι $g(x)=e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}$.

Η g έχει ελάχιστο το 2 όταν $g(x)\ge 2$ και υπάρχει τιμή του x για την οποία ισχύει η ισότητα.

$g(x)\ge 2\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\ge 2\Leftrightarrow\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2+1\ge 2e^{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2-2e^{\sqrt{x}}+1\ge 0\Leftrightarrow\ \left(e^{\sqrt{x}}-1\right)^2\ge 0$ ισχύει.

Είναι $g(x)=2\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}=2\Leftrightarrow\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2+1=2e^{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2-2e^{\sqrt{x}}+1=0\Leftrightarrow$

$\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)^2=0\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$. Η θέση ελαχίστου είναι η $x=0$.

ε) $h^2(x)-4h(x)\le f(x^4)-4\Leftrightarrow h^2(x)-4h(x)+4\le x^2\Leftrightarrow\left(h(x)-2\right)^2\le x^2$ (1)

Η (1) για $x=0$ γίνεται $\left(h(0)-2\right)^2\le 0\Leftrightarrow h(0)=2$

Για $x \neq 0$ η (1) γίνεται $|h(x)-2| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq h(x)-2 \leq |x| \Leftrightarrow 2-|x| \leq h(x) \leq 2+|x|$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(2-|x|)=2,\ \lim\limits_{x\to 0}(2+|x|)=2$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=h(0)$, η h είναι συνεχής στο $x=0$.

7η Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x}=0$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(f(x)))}{x}=0$

β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν), τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2-2x\eta\mu x+\eta\mu^2 x}$

γ) Αν για συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει ότι $g^2(x)-f^2(x)+1\leq 2g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

Λύση

α) i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1-1=0$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=0\cdot 1=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\underset{\substack{x\to 0\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{\eta\mu x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=0$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(f(x)))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(f(f(x)))}{f(f(x))}\cdot\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\right]=0\cdot 0\cdot 0=0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{f(x)}\underset{\substack{x\to 0\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(u)}{u}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(f(x)))}{f(f(x))}\underset{\substack{x\to 0\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(u))}{f(u)}=0$

β) i. $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right]=+\infty(1-0)=+\infty$ γιατί για κάθε $x>0$ είναι:

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{x}\leq\frac{1}{x}\Leftrightarrow -\frac{1}{x}\leq\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$, οπότε από το Κ.Π είναι και $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2-2x\eta\mu x+\eta\mu^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{f^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$

Για κάθε $x>0$ είναι $|\eta\mu x|<|x|\Rightarrow|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x\Rightarrow x-\eta\mu x>0\Rightarrow f(x)>0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to 0^+\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{1}{u}=+\infty$.

Για κάθε $x<0$ είναι $|\eta\mu x|<|x|\Rightarrow|\eta\mu x|<-x\Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x\Rightarrow x-\eta\mu x<0\Rightarrow f(x)<0$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)} \underset{\substack{x\to 0^-\Rightarrow\\ u\to 0^-}}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u}=-\infty$. Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}$

γ) $g^2(x)-f^2(x)+1\le 2g(x)\Leftrightarrow g^2(x)-2g(x)+1\le f^2(x)\Leftrightarrow (g(x)-1)^2\le f^2(x)\Leftrightarrow |g(x)-1|\le |f(x)|$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$ και $0\le |g(x)-1|$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to 0}(g(x)-1)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

8η Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε τη τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Έστω $\lambda=2$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια: **i.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και **ii.** $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x)=(x+1)f(x)$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{g(x)}-1}{x+1}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{g(x)}+\sqrt[3]{g(x)}-2}{x+1}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{g(x)}+3^{g(x)}-1}{4^{g(x)}+5}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln\left(e^{g(x)}+1\right)\right]$

Λύση

α) Για $x\ne\pm 1$ είναι: $f(x)(x^2-1)=(\lambda-1)x^2+x-2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=k\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)(x^2-1)\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[(\lambda-1)x^2+x-2\right]\Leftrightarrow 0=\lambda-1+1-2\Leftrightarrow \lambda=2$

Τότε $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x+2}{x+1}$ και $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{3}{2}$.

β) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

ii. $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left[(x+2)\dfrac{1}{x+1}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[(x+2)\dfrac{1}{x+1}\right]=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to -1^-}(x+2)=1$, $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$.

γ) $g(x)=(x+1)\dfrac{x+2}{x+1}=x+2,\ x\ne\pm 1$

i. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{g(x)}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-1\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2-1}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}=$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}=\dfrac{1}{2}$

ii. Θέτουμε $\sqrt[6]{g(x)}=u\Leftrightarrow \sqrt[3]{g(x)}=u^2$, $\sqrt{g(x)}=u^3$ και $g(x)=u^6\Leftrightarrow x=u^6-2$.

Όταν $x\to -1$ τότε $u\to 1$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{g(x)}+\sqrt[3]{g(x)}-2}{x+1}=\lim_{u\to 1}\frac{u^3+u^2-2}{u^6-2+1}=\lim_{u\to 1}\frac{(u-1)(u^2+2u+2)}{(u-1)(u^5+u^4+u^3+u^2+u+1)}=\frac{5}{6}$$

iii. Θέτουμε $g(x)=u$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{g(x)}+3^{g(x)}-1}{4^{g(x)}+5}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2^u+3^u-1}{4^u+5}=\lim_{u\to+\infty}\frac{3^u\left(\left(\frac{2}{3}\right)^u+1-\frac{1}{3^u}\right)}{4^u\left(1+\frac{5}{4^u}\right)}=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^u\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^u+1-\frac{1}{3^u}}{1+\frac{5}{4^u}}=0\cdot\frac{0+1-0}{1+0}=0$$

iv. $$\lim_{x\to+\infty}\left[x-\ln\left(e^{g(x)}+1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln e^x-\ln\left(e^{x+1}+1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x}{e^{x+1}+1}\right)\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to\frac{1}{e}}}{\overset{\frac{e^x}{e^{x+1}+1}=u}{=}}\lim_{u\to\frac{1}{e}}\ln u=\ln\frac{1}{e}=-1$$

γιατί $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x+1}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(e+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1}{e}$$