Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020

5ο Διαγώνισμα Λύσεις

11 - 4 -2020

Θέμα Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$ Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

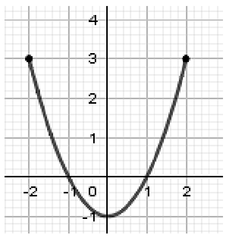
Α2. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1\ne x_2$, τότε $f(x_1)\ne f(x_2)$.

Α3.

α	β	γ	δ
Ε	Α	Β	Δ

Α4. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=x^2-1,\ x\in[-2,2]$. Η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες τις -1, 1 στο $(-2,2)$ όμως $f(-2)=3,\ f(2)=3$ και $f(-2)f(2)>0$



Α5. α) Σ β) i. Λ ii. Σ γ) Λ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}+2, x>-1$.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0$ για κάθε $x>-1$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$. Ισχύει ότι $\lim_{x\to -1^+}f'(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(e^x-\frac{1}{x+1}+2\right)=-\infty$ άρα κοντά στο -1 υπάρχει αριθμός

$\gamma \in \left(-1,-\frac{1}{2}\right): f'(\gamma)<0$ και επίσης ισχύει $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}>0$ άρα έχουμε $f'(\gamma)f'\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in \left(0,-\frac{1}{2}\right): f'(x_1)=0$ και επειδή $f' \nearrow$ στο $(-1,+\infty)$ τότε το x_1 είναι μοναδικό.

Για $-1<x\le x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)\le f'(x_1)=0$ και για $x\ge x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)\ge f'(x_1)=0$ με τις ισότητες να ισχύουν μόνον για $x=x_1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=x_1$ τότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	-1		x_1		$+\infty$
f'		‖	$-$	0	$+$	
f		‖	$\searrow$		$\nearrow$	

Ο.Ε.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=x_1$ το $K(x_1,f(x_1))$.

2^{ος} τρόπος

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}+2, x>-1$.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0$ για κάθε $x>-1$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(e^x-\frac{1}{x+1}+2\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x-\frac{1}{x+1}+2\right)=+\infty-0+2=+\infty$ οπότε $f'(A)=(-\infty,+\infty)$.

Το $0\in f(A)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in A_{f'}: f'(x_1)=0$ και επειδή $f' \nearrow$ στο $(-1,+\infty)$ τότε το x_1 είναι μοναδικό.

Για $-1<x\le x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)\le f'(x_1)=0$ και για $x\ge x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)\ge f'(x_1)=0$ με τις ισότητες να ισχύουν μόνον για $x=x_1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=x_1$ τότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	-1		x_1		$+\infty$
f'		‖	$-$	0	$+$	
f		‖	$\searrow$		$\nearrow$	

Ο.Ε.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=x_1$ το $K(x_1,f(x_1))$.

Β2. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,x_1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_1,+\infty)$ τότε προφανώς τα $x_2\in(-1,x_1)$ και $x_3\in(x_1,0]$ είναι οι μοναδικές ρίζες της f και συγκεκριμένα η $x_2 \in (-1, x_1)$ είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-1, x_1]$ και η $x_3 \in (x_1, 0]$ είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα $[x_1, +\infty)$.

Στο διάστημα $[x_1, +\infty)$ η f έχει προφανή ρίζα το μηδέν άρα ισχύει ότι $x_3 = 0$.

Επίσης επειδή η f είναι συνεχής και έχει δύο μοναδικές ρίζες τότε μεταξύ των ριζών θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Το $-\frac{1}{2} \in (x_2, x_3)$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} + \ln 2 - 1 - 1 < 0$ γιατί έχουμε:

$\frac{1}{\sqrt{e}} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} > 1$ που ισχύει και $\ln 2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln 2 < 1 \Leftrightarrow 2 < e$ ισχύει.

Άρα στο διάστημα (x_2, x_3) ισχύει ότι $f(x) < 0$ και $x_1 \in (x_2, x_3)$ άρα $f(x_1) < 0$.

Β3. Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f στο διάστημα $[x, x+1]$ και έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$$

1ος τρόπος: Από Β1 η $f' \nearrow$ στο $(-1, +\infty)$ και έχουμε:

$$x < \xi < x+1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x+1} + 2 < f(x+1) - f(x) < e^{x+1} - \frac{1}{x+2} + 2$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - \frac{1}{x+1} + 2\right) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x+1} - \frac{1}{x+2} + 2\right) = +\infty$ άρα από κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1) - f(x)\right] = +\infty$

2ος τρόπος: Ισχύει $x < \xi < x+1$ δηλαδή αφού το ξ εξαρτάται από το x έστω $\xi = \xi(x)$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi(x) = +\infty$ άρα όταν το $x \to +\infty$ τότε $\xi \to +\infty$ άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x+1) - f(x)\right] = \lim_{\xi\to+\infty} f'(\xi) = \lim_{\xi\to+\infty}\left(e^{\xi} - \frac{1}{\xi+1} + 2\right) = +\infty$$

3ος τρόπος: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1) - f(x)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x+1} - \ln(x+2) + 2x + 2 - 1 - e^x + \ln(x+1) - 2x + 1\right) =$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(e^x(e-1) + \ln\frac{x+1}{x+2} + 2\right)\right] = +\infty + 0 + 2 = +\infty \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x+2} \overset{u=\frac{x+1}{x+2}}{\underset{u\to 1}{=}} \lim_{\substack{x\to+\infty,\ u\to 1}} \ln u = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$$

Β4. Επειδή $f(0) = 0$ η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ είναι η ευθεία ε: $y = f'(0)x \Leftrightarrow y = 2x$.

Για να εφάπτεται η ε στη C_h, αρχικά πρέπει να υπάρχει σημείο $x_4 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h'(x_4) = 2$.

Είναι $h'(x) = e^{x-1} + 1$. Παρατηρούμε ότι $h'(1) = 2$. Η εφαπτομένη της C_h στο $x = 1$ έχει εξίσωση $y - h(1) = h'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x$, δηλαδή είναι η ε.

Β5. Αρκεί να υπάρχουν $x_5, x_6 > 0$ τέτοια, ώστε $f'(x_5)f'(x_6) = -1$.

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 2$, άρα $f'(x_5)f'(x_6) > 0$ και δεν υπάρχουν τέτοια σημεία.

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $\varphi(x)=g(x)-xh(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $\varphi'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x=x\eta\mu x$.

Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varphi'(x)>0$ και για $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ είναι $\eta\mu x<0\Rightarrow x\eta\mu x>0$ άρα $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ είναι $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow-1\le\varphi(x)\le1\Leftrightarrow|\varphi(x)|\le1$

Γ2. $\beta g(\alpha)>\alpha g(\beta)\Leftrightarrow\beta\,\eta\mu\alpha>\alpha\,\eta\mu\beta\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}>\frac{\eta\mu\beta}{\beta}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=\frac{\eta\mu x}{x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Είναι $t'(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}=\frac{-\varphi(x)}{x^2}$.

Για κάθε $0<x<\frac{\pi}{2}$ είναι $\varphi(x)>\varphi(0)=0\Rightarrow t(x)<0\Rightarrow t\searrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $\alpha<\beta\Leftrightarrow t(\alpha)>t(\beta)\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}>\frac{\eta\mu\beta}{\beta}\Leftrightarrow\beta\eta\mu\alpha>\alpha\eta\mu\beta$

Γ3. Έχουμε $D_{g\circ h}=\{x\in D_h\,/\,h(x)\in D_g\}=\left\{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]/\ \sigma\upsilon\nu x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}\overset{-1\le\sigma\upsilon\nu x\le1}{=}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και επίσης

$D_{h\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_h\}=\left\{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]/\ \eta\mu x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}\overset{-1\le\eta\mu x\le1}{=}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, άρα $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Άρα $f(x)=(g\circ h)(x)+(h\circ g)(x)=g(h(x))+h(g(x))=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)+\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)$

Μονοτονία της f.

1$^{\text{ος}}$ τρόπος (Χωρίς παραγώγους):

Για κάθε $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2\Rightarrow$

- $\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow}\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2\overset{\eta\mu x\nearrow}{\Rightarrow}\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x_1)>\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x_2)$ **(3)** γιατί $0\le\sigma\upsilon\nu x_2<\sigma\upsilon\nu x_1\le1<\frac{\pi}{2}$
- $\overset{\eta\mu x\nearrow}{\Rightarrow}\eta\mu x_1<\eta\mu x_2\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow}\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_1)>\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_2)$ **(4)** γιατί $0\le\eta\mu x_1<\eta\mu x_2\le1<\frac{\pi}{2}$

$(3)+(4):f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Για κάθε $x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ με

$x_1<x_2\Rightarrow-x_1>-x_2\underset{-x_1,-x_2\in[0,\pi/2]}{\overset{f\searrow}{\Rightarrow}}f(-x_1)<f(-x_2)\overset{\text{Άρτια}}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

(**ΣΧΟΛΙΟ:** Θα μπορούσαμε όπως δουλέψαμε στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ να δουλέψουμε ομοίως και στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ όμως με το δεδομένο ότι είναι άρτια τελειώνουμε πολύ πιο γρήγορα).

Και επειδή είναι συνεχής στο μηδέν τότε το $f(0)=\eta\mu1+1$ είναι ολικό μέγιστο.

2ος τρόπος (Με παραγώγους):

Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$f'(x) = -\eta\mu x\cdot(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)) - \sigma\upsilon\nu x\cdot(\eta\mu(\eta\mu x)), x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x\in(0,1)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και

$\eta\mu(\eta\mu x), \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)\in(0,1)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα $\sigma\upsilon\nu(\eta\mu(\eta\mu x)), \eta\mu(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x))>0$ αφού μέσα στους τριγωνομετρικούς αριθμούς έχουμε γωνίες $1^{ου}$ τεταρτημορίου άρα ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Για κάθε $x_1, x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ με

$$x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \underset{-x_1,-x_2\in[0,\pi/2]}{\overset{f\searrow}{\Rightarrow}} f(-x_1)<f(-x_2) \overset{\text{Άρτια}}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\nearrow\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$$

(**ΣΧΟΛΙΟ:** Θα μπορούσαμε όπως δουλέψαμε στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ να δουλέψουμε ομοίως και στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ όμως με το δεδομένο ότι είναι άρτια τελειώνουμε πολύ πιο γρήγορα).

Και επειδή είναι συνεχής στο μηδέν τότε το $f(0)=\eta\mu 1+1$ είναι ολικό μέγιστο.

<u>Επίσης το πρόσημο της παραγώγου θα μπορούσε να δειχτεί και με την παρακάτω πιο χρονοβόρα διαδικασία:</u>

Για κάθε $x_1, x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$:

- $-1<\eta\mu x\le 0\Leftrightarrow 0\le -\eta\mu x<1,\ 0<\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow -1\le -\sigma\upsilon\nu x<0,\ -1<\eta\mu x\le 0 \overset{\eta\mu x\nearrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu(\eta\mu x)\le 0$
- $0<\sigma\upsilon\nu x\le 1 \overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Leftrightarrow} 0<\sigma\upsilon\nu(1)\le\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)<1$

Για κάθε $x_1, x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $0\le\eta\mu x<1\Leftrightarrow -1<-\eta\mu x\le 0,\ 0<\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow -1\le -\sigma\upsilon\nu x<0$

- $0\le\eta\mu x<1 \overset{\eta\mu x\nearrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu(\eta\mu x)\ge 0,\ 0<\sigma\upsilon\nu x\le 1 \overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Leftrightarrow} 0<\sigma\upsilon\nu(1)\le\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)<1$

Άρα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$ … $-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ … 0	0 … $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ … $+\infty$
$-\eta\mu x$		+	−	
$-\sigma\upsilon\nu x$		−	−	
$\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)$		+	+	
$\eta\mu(\eta\mu x)$		−	+	
$-\eta\mu x\cdot(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x))$		+	−	
$-\sigma\upsilon\nu x\cdot(\eta\mu(\eta\mu x))$		+	−	
$f'(x)$		+	−	
$f(x)$		↗	↘	

Γ4. $\ln\left(\dfrac{εφ(συν(ημx))}{συν(εφ(συνx))}\right)+f(x)=1 \Leftrightarrow \ln\big(εφ(συν(ημx))\big)-\ln\big(συν(εφ(συνx))\big)+f(x)-1=0$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\ln\big(εφ(συν(ημx))\big)-\ln\big(συν(εφ(συνx))\big)+f(x)-1,\ x\in\left[0,\dfrac{π}{2}\right]$

Θα βρούμε την μονοτονία της g με δύο τρόπους:

1ος τρόπος (Χωρίς Παραγώγους):

Για κάθε $x_1,x_2\in\left[0,\dfrac{π}{2}\right]$ με $x_1<x_2 \Rightarrow$

- $\xRightarrow{ημx\nearrow} 0\le ημx_1<ημx_2\le 1<\dfrac{π}{2} \xRightarrow{συνx\searrow} 0<συν(ημx_2)<συν(ημx_1)\le 1 \xRightarrow{εφx\nearrow}$

$\xRightarrow{εφx\nearrow} 0<εφ\big(συν(ημx_2)\big)<εφ\big(συν(ημx_1)\big)\le εφ1<\dfrac{π}{2} \xRightarrow{\ln x\nearrow} \ln\big(εφ(συν(ημx_2))\big)<\ln\big(εφ(συν(ημx_1))\big)\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\big(εφ(συν(ημx_1))\big)>\ln\big(εφ(συν(ημx_2))\big)$ **(5)**

- $\xRightarrow{συνx\searrow} 0\le συνx_2<συνx_1\le 1<\dfrac{π}{2} \xRightarrow{εφ\nearrow} 0\le εφ(συνx_2)<εφ(συνx_1)\le εφ1<\dfrac{π}{2} \xRightarrow{συνx\searrow}$

$\xRightarrow{συνx\searrow} 0<συν\big(εφ(συνx_1)\big)<συν\big(εφ(συνx_2)\big)\le 1 \xRightarrow{\ln x\nearrow} \ln\big(συν(εφ(συνx_1))\big)<\ln\big(συν(εφ(συνx_2))\big)\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\big(συν(εφ(συνx_1))\big)>\ln\big(συν(εφ(συνx_2))\big)$ **(6)**

- $\xRightarrow{f\searrow} f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f(x_1)-1>f(x_2)-1$ **(7)**

$(5)+(6)+(7): g(x_1)>g(x_2)\Rightarrow g\searrow\left[0,\dfrac{π}{2}\right]$

2ος τρόπος (Με Παραγώγους):

$$g'(x)=\frac{\big(εφ(συν(ημx))\big)'}{εφ(συν(ημx))}-\frac{\big(συν(εφ(συνx))\big)'}{συν(εφ(συνx))}+f'(x)=$$

$$=\frac{\dfrac{-ημ(ημx)\cdot συνx}{συν^2(συν(ημx))}}{εφ(συν(ημx))}-\frac{-ημ\big((εφ(συνx))\big)\dfrac{-ημx}{συν^2(συνx)}}{συν(εφ(συνx))}-ημx\big(συν(συνx)\big)-συνx\big(ημ(ημx)\big)=$$

$$=-\frac{ημ(ημx)\cdot συνx}{συν^2\big(συν(ημx)\big)\cdot εφ\big(συν(ημx)\big)}-\frac{ημ\big((εφ(συνx))\big)\cdot ημx}{συν\big(εφ(συνx)\big)\cdot συν^2(συνx)}-ημx\big(συν(συνx)\big)-συνx\big(ημ(ημx)\big)$$

Ισχύει $g'(x)<0$ στο $\left(0,\dfrac{π}{2}\right)$ επειδή $x, ημx, συν(ημx), εφ(συνx)\in\left(0,\dfrac{π}{2}\right)$ άρα επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{π}{2}\right]$ τότε η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Η g είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $g(0)=\ln(εφ1)-\ln\big(συν(εφ1)\big)+ημ1=\ln\left(\dfrac{εφ1}{συν(εφ1)}\right)+ημ1>0$ γιατί

$$εφ1>συν(εφ1)\Leftrightarrow \frac{εφ1}{συν(εφ1)}>1\Leftrightarrow \ln\left(\frac{εφ1}{συν(εφ1)}\right)>0 \text{ και } ημ1>0$$

- $g\left(\dfrac{π}{2}\right)=\ln\big(εφ(συν1)\big)+συν1-1<0$ γιατί $0<συν1<\dfrac{π}{4}\xLeftrightarrow{εφ\nearrow} εφ(συν1)<1\Leftrightarrow \ln\big(εφ(συν1)\big)<0$ και $συν1<1$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : g(x_0) = 0$ όμως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα το xo είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα αυτό.

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $2f'(x)f(x) + 2g'(x)\,g(x) = 2g'(2x) \Leftrightarrow \left(f^2(x) + g^2(x)\right)' = \left(g(2x)\right)' \Leftrightarrow$

$f^2(x) + g^2(x) = g(2x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

Για $x = 0$ είναι $f^2(0) + g^2(0) = g(0) + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$, οπότε $f^2(x) + g^2(x) = g(2x),\ x \in \mathbb{R}$

Δ2. Είναι $f^2(x) + g^2(x) = g(2x) \Leftrightarrow f^2(x) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \Leftrightarrow$

$$f^2(x) + \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x} - e^{2x} - 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{|e^x - e^{-x}|}{2} \quad (1)$$

Η f έχει μοναδική ρίζα το $x = 0$ γιατί για $x > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$ και

για $x < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < -x \Leftrightarrow e^x < e^{-x} \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} < 0$, οπότε για $x \neq 0$ είναι $|f(x)| \neq 0$

ή

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \frac{|e^x - e^{-x}|}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Κατά συνέπεια η f ως συνεχής στο $\mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα που οι ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Έτσι έχουμε 4 περιπτώσεις:

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
1) $f(x)$	$-$	$+$
2) $f(x)$	$+$	$-$
3) $f(x)$	$+$	$+$
4) $f(x)$	$-$	$-$

Άρα έχουμε για κάθε περίπτωση:

1) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2},\ x \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \frac{|e^{-x} - e^x|}{2} = \begin{cases} \frac{e^{-x} - e^x}{2}, & x < 0 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$

4) $f(x) = -\frac{|e^{-x} - e^x|}{2} = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & x < 0 \\ \frac{e^{-x} - e^x}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1.

Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} που είναι το σύνολο τιμών της f.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=+\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Για κάθε $x\in A=\mathbb{R}$ έστω $f(x)=y,\ y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=y\Leftrightarrow e^x-e^{-x}=2y\overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}e^{2x}-1=2ye^x\Leftrightarrow$

$e^{2x}-2ye^x+y^2=1+y^2\Leftrightarrow\left(e^x-y\right)^2=1+y^2\Leftrightarrow\left|e^x-y\right|=\sqrt{1+y^2}$

Άλλα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x-y=e^x-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$, άρα

$e^x-y=\sqrt{1+y^2}\Leftrightarrow e^x=y+\sqrt{1+y^2}\quad(2)$

Είναι $y^2<y^2+1\Leftrightarrow\sqrt{y^2}<\sqrt{y^2+1}\Leftrightarrow|y|<\sqrt{y^2+1}\Leftrightarrow-\sqrt{y^2+1}<y<\sqrt{y^2+1}\Rightarrow y+\sqrt{y^2+1}>0$

Οπότε για κάθε $y\in\mathbb{R}$ από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $x=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$

Οπότε $\quad f^{-1}:f(A)\to\mathbb{R}$

$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=g(kx)-k\,g(x),\ x\in\mathbb{R}$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=kg'(kx)-k\,g'(x)=k\left(g'(kx)-g'(x)\right)$

Αλλά $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\Rightarrow g''(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0\Rightarrow g'\nearrow\mathbb{R}$

Οπότε για $x>0\overset{(k-1)>0}{\Leftrightarrow}(k-1)x>0\Leftrightarrow kx>x\overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow}g'(kx)>g'(x)\Rightarrow k\left(g'(kx)-g'(x)\right)>0\Rightarrow\varphi'(x)>0$

και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Είναι $g\left(kx^2\right)-g\left(kx^4\right)>k\left(g\left(x^2\right)-g\left(x^4\right)\right),\ k>1\Leftrightarrow$

$g\left(kx^2\right)-kg\left(x^2\right)>g\left(kx^4\right)-kg\left(x^4\right)\Leftrightarrow$

$\varphi\left(x^2\right)>\varphi\left(x^4\right)\overset{\varphi\uparrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow}x^2>x^4\Leftrightarrow x^2-x^4>0\Leftrightarrow x^2\left(1-x^2\right)>0\Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(0,1)$