4ο Προσομοιωτικό διαγώνισμα
Στα Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Α2. Να δώσετε τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής.

Α3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} + 1$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Θεωρήστε τους παρακάτω ισχυρισμούς:

Α) η g είναι συνεχής στο x = 2

Β) η f είναι συνεχής στο x = 1

Γ) η g έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής.

Δ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$

Ε) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$

α) Να γράψετε ποιος από τους παραπάνω ισχυρισμούς είναι λάθος.

β) Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Α4. Δίνονται τα όρια:

Α) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^{20} - x + 1}$ **Β)** $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^{10} + x - 3}$

Γ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{3x^{11} + x - 1}$ **Δ)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{3x^{9} - 2x + 1}$

α) Να γράψετε ποια από τα παραπάνω όρια είναι καλώς ορισμένα και ποια δεν είναι.

β) Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας

Α5. Να χαρακτηρίσετε με **Σ** αν η πρόταση είναι σωστή ή με **Λ** αν είναι λάθος.

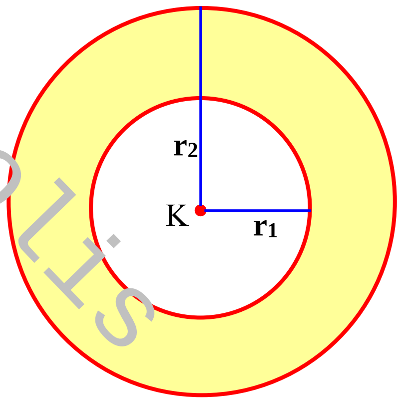
α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] τέτοια ώστε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.

β) Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το όριο $\lim_{x \to 0} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \to 0} f(x) > 1$.

γ) Αν οι f, g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο [α, β] με f(α) = g(α) και f(β) = g(β) τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ Β

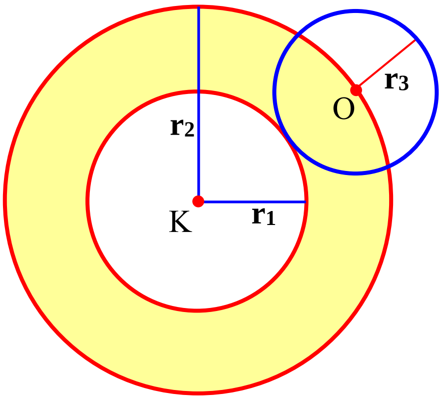
Έστω Ε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή t = 0 είναι $r_1 = 3$ cm και $r_2 = 5$ cm και ότι για t > 0 η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05 cm/s, ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s.



Β1. Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή t > 0 οι ακτίνες των κύκλων είναι $r_1(t) = 3 + 0{,}05 \cdot t$ και $r_2(t) = 5 + 0{,}04 \cdot t$. Στη συνέχεια να βρείτε τη χρονική στιγμή στην οποία το εμβαδόν Ε του κυκλικού δακτυλίου γίνεται μηδέν.

Β2. Να βρείτε τη χρονική στιγμή $t_0 \in (0, 200)$ στην οποία το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου γίνεται μέγιστο.

Θεωρούμε ένα νέο κύκλο που έχει ακτίνα r_3, του οποίου το κέντρο του Ο βρίσκεται πάντα στον κύκλο με ακτίνα r_2 και εφάπτεται συνεχώς στον κύκλο με ακτίνα r_1 όπως βλέπετε στο παρακάτω σχήμα.



Β3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας r_3.

Β4. Αν Ε(t) είναι το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και $E_3(t)$ το εμβαδόν του κύκλου με κέντρο το σημείο Ο, να βρείτε το όριο

$$\lim_{t\to 200^-}\frac{E(t)}{E_3(t)}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη με:

- $(x-2)\cdot f'(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $2\cdot e^x - (f(0)+3)\cdot x - 2 \geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$

Γ2. Να βρείτε τον τύπο της f.

Αν $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $x\in\mathbb{R}$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

Γ4. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένη της C_f γίνεται ελάχιστος.

Γ5. Αν x_1, x_2 οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η τετμημένη του σημείου στο οποίο παρουσιάζει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης, να αποδείξετε ότι τα σημεία $Α(x_1, f(x_1))$, $Β(x_2, f(x_2))$ και $Γ(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = αx^2 + βx + γ}$, με $α, β, γ \neq 0$

Δ1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2 ισχύει $x_1 \neq x_2$ τότε να αποδείξετε ότι ισχύει ισοδυναμία:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{β}{α}$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε οποιοδήποτε διάστημα $[x_1, x_2]$, όπου $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και τέτοια ώστε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{β}{α}$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $ξ \in (x_1, x_2)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle είναι το κέντρο του διαστήματος $[x_1, x_2]$, δηλαδή είναι:

$$ξ = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $x > 1$

Δ4. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ5. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ με $κ < λ$ ισχύει $κ + λ = -\dfrac{β}{α}$, να βρείτε τις τιμές των $ω, φ > 1$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(λ + ω \cdot \ln φ + φ \cdot \ln ω) = f(κ - 2e \cdot \ln ω \cdot \ln φ)$$

Ενδεικτικές απαντήσεις

Επιμέλεια: Ανδρέας Σουρούνης

Α3. α) Γ Λάθος

β) Η g ορίζεται στο σύνολο $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ και είναι συνεχής στο A ως ρητή συνάρτηση.

Α4. Έχουμε:

• Το Α είναι καλώς ορισμένο, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}(x^{20} - x + 1) = 1 > 0$ οπότε ισχύει $x^{20} - x + 1 > 0$ κοντά στο $x = 0$

• Το Β δεν είναι καλώς ορισμένο, γιατί $\lim\limits_{x\to 1}(x^{10} + x - 3) = -1 < 0$ οπότε ισχύει $x^{10} + x - 3 < 0$ κοντά στο $x = 1$

• Το Γ δεν είναι καλώς ορισμένο, γιατί $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x^{11} + x - 1) = \lim\limits_{x\to -\infty}(3x^{11}) = -\infty < 0$ οπότε ισχύει $3x^{11} + x - 1 < 0$ κοντά στο $x = -\infty$

• Το Δ είναι καλώς ορισμένο, γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x^{9} - 2x + 1) = \lim\limits_{x\to +\infty}(3x^{9}) = +\infty > 0$ οπότε ισχύει $3x^9 - 2x + 1 > 0$ κοντά στο $x = +\infty$

Α5. α) Λάθος, β) Λάθος, γ) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η ακτίνα κάθε κύκλου τη χρονική στιγμή t, είναι το αρχικό μήκος της συν την αύξηση που προκύπτει από τη μεταβολή της, επομένως είναι:

$$r_1(t) = 3 + 0{,}05\cdot t \quad \text{και} \quad r_2(t) = 5 + 0{,}04\cdot t$$

Αν E_1, E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων με ακτίνες r_1 και r_2 αντίστοιχα τότε το εμβαδόν Ε του κυκλικού δακτυλίου είναι $E = E_2 - E_1$, οπότε $E = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$. Επειδή τα μεγέθη E, r_1, r_2 είναι συναρτήσεις του χρόνου έχουμε:

$$E(t) = \pi \cdot r_2^2(t) - \pi \cdot r_1^2(t)$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$E(t) = \pi \cdot (5 + 0,04 \cdot t)^2 - \pi \cdot (3 + 0,05 \cdot t)^2$$

Είναι:

$E(t) = 0 \Leftrightarrow \pi \cdot (5 + 0,04 \cdot t)^2 - \pi \cdot (3 + 0,05 \cdot t)^2 = 0 \Leftrightarrow \pi \cdot (5 + 0,04 \cdot t)^2 = \pi \cdot (3 + 0,05 \cdot t)^2$

$\Leftrightarrow (5 + 0,04 \cdot t)^2 = (3 + 0,05 \cdot t)^2 \Leftrightarrow \left(5 + 0,04 \cdot t = 3 + 0,05 \cdot t \text{ ή } 5 + 0,04 \cdot t = -3 - 0,05 \cdot t\right)$

$\Leftrightarrow$ ($0,01 \cdot t = 2$ ή $0,09 \cdot t = -8$ που είναι αδύνατη) $\Leftrightarrow t = 200$ sec.

Β2. Είναι $E(t) = \pi \cdot (5 + 0,04 \cdot t)^2 - \pi \cdot (3 + 0,05 \cdot t)^2$, $t > 0$

Είναι παραγωγίσιμη με:

$E'(t) = \pi \cdot 2(5 + 0,04 \cdot t) \cdot 0,04 - \pi \cdot 2(3 + 0,05 \cdot t) \cdot 0,05$

$E'(t) = 2\pi \cdot 0,01 \cdot [(5 + 0,04 \cdot t) \cdot 4 - (3 + 0,05 \cdot t) \cdot 5]$

$E'(t) = 2\pi \cdot 0,01 \cdot (20 + 0,16 \cdot t - 15 - 0,25 \cdot t) \Leftrightarrow E'(t) = 2\pi \cdot 0,01 \cdot (5 - 0,09 \cdot t)$

Έστω $E'(t) = 0 \Leftrightarrow 2\pi \cdot 0,01 \cdot (5 - 0,09 \cdot t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{500}{9}$

$E'(t) > 0 \Leftrightarrow 2\pi \cdot 0,01 \cdot (5 - 0,09 \cdot t) > 0 \Leftrightarrow t < \frac{500}{9}$

$E'(t) < 0 \Leftrightarrow 2\pi \cdot 0,01 \cdot (5 - 0,09 \cdot t) < 0 \Leftrightarrow t > \frac{500}{9}$

x	0	$\frac{500}{9}$	$+\infty$
$E'(t)$	+		–
$E(t)$	↗		↘

Το εμβαδόν Ε του δακτυλίου γίνεται μέγιστο όταν $t_0 = \frac{500}{9}$

Β3. Η ακτίνα r_3 του νέου κύκλου είναι ίση με $r_3 = r_2 - r_1$ οπότε

$r_3(t) = r_2(t) - r_1(t) \Leftrightarrow r_3(t) = (5 + 0,04 \cdot t) - (3 + 0,05 \cdot t) \Leftrightarrow r_3(t) = 2 - 0,01 \cdot t$, $t > 0$

Οπότε $r_3'(t) = (2 - 0,01 \cdot t)' \Leftrightarrow r_3'(t) = -0,01$

Άρα η ακτίνα r_3 ελαττώνεται με ρυθμό 0,01 cm/sec

Β4. Έχουμε $E(t) = \pi \cdot (5 + 0,04 \cdot t)^2 - \pi \cdot (3 + 0,05 \cdot t)^2 \Leftrightarrow$

$$E(t) = \pi \cdot (5 + 0,04 \cdot t - 3 - 0,05 \cdot t) \cdot (5 + 0,04 \cdot t + 3 + 0,05 \cdot t) \Leftrightarrow$$

$$E(t) = \pi \cdot (2 - 0,01 \cdot t) \cdot (8 + 0,09 \cdot t)$$

Επίσης

$$r_3(t) = 2 - 0,01 \cdot t \text{ και } E_3(t) = \pi r_3^2 \Leftrightarrow E_3(t) = \pi \cdot (2 - 0,01 \cdot t)^2$$

Επομένως

$$\lim_{t \to 200^-} \frac{E(t)}{E_3(t)} = \lim_{t \to 200^-} \frac{\pi \cdot (2 - 0,01 \cdot t)(8 + 0,09 \cdot t)}{\pi \cdot (2 - 0,01 \cdot t)^2} = \lim_{t \to 200^-} \frac{8 + 0,09 \cdot t}{2 - 0,01 \cdot t}$$

Είναι

- $\lim\limits_{t \to 200^-} (2 - 0,01 \cdot t) = 0$ και $2 - 0,01 \cdot t > 0$, άρα $\lim\limits_{t \to 200^-} \dfrac{1}{2 - 0,01 \cdot t} = +\infty$
- επίσης $\lim\limits_{t \to 200^-} (8 + 0,09 \cdot t) = 26$

Άρα $\lim\limits_{t \to 200^-} \dfrac{E(t)}{E_3(t)} = +\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2 \cdot e^x - (f(0) + 3) \cdot x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$2 \cdot e^x - (f(0) + 3) \cdot x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$$

Είναι $g(0) = 0$, οπότε η υπόθεση γράφεται:

$$g(x) \geq g(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Το $x = 0$ είναι εσωτερικό του $\mathbb{R}$
- Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$
- Είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2e^x - f(0) - 3$

Άρα από το θεώρημα Fermat προκύπτει $g'(0) = 0$. Έχουμε:

$g'(0) = 0 \Leftrightarrow 2e^0 - f(0) - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 - f(0) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(0) = -1$

Γ2. Για κάθε $x \neq 2$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2}{x - 2} \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 1,$$ οπότε $f'(x) = (x^3 + x^2 - x)'$

• Για κάθε $x < 2$ υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = x^3 + x^2 - x + c_1$

Γνωρίζουμε ότι $f(0) = -1$, οπότε $c_1 = -1$.

Άρα $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ για κάθε $x < 2$

• Για κάθε $x > 2$ υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = x^3 + x^2 - x + c_2$

Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής, άρα συνεχής και στο $x = 2$, οπότε:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \to 2^-}(x^3 + x^2 - x - 1) = \lim_{x \to 2^+}(x^3 + x^2 - x + c_2) \Leftrightarrow c_2 = -1$$

Άρα $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ για κάθε $x > 2$

Επιπλέον $f(2) = 9$, άρα $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ και έχει ρίζες

τους αριθμούς -1 και $\frac{1}{3}$

x	-1		$\frac{1}{3}$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Στο $x_1 = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 0$ και στο $x_2 = \frac{1}{3}$

τοπικό ελάχιστο το $f(\frac{1}{3}) = -\frac{32}{27}$

Γ4. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης της C_f σε κάθε σημείο $M(x, f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\lambda = f'(x)$, οπότε αρκεί να βρούμε το ελάχιστο της f'. Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = 6x + 2$ και το πρόσημο της δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\frac{1}{3}$	
$f''(x)$	–	+
$f'(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται ελάχιστος όταν $x_3 = -\frac{1}{3}$ και

$f(-\frac{1}{3}) = -\frac{16}{27}$

Γ5. Έστω τα σημεία Α(–1, 0), $B(\frac{1}{3}, -\frac{32}{27})$ και $\Gamma(-\frac{1}{3}, -\frac{16}{27})$, τότε:

$\lambda_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-\frac{32}{27} - 0}{\frac{1}{3}+1} = \dfrac{-\frac{32}{27}}{\frac{4}{3}} = -\frac{8}{9}$, ο συντελεστής διεύθυνσης τη ΑΒ

$\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \dfrac{-\frac{16}{27} - 0}{-\frac{1}{3}+1} = \dfrac{-\frac{16}{27}}{\frac{2}{3}} = -\frac{8}{9}$, ο συντελεστής διεύθυνσης τη ΑΓ

Είναι $\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma}$, άρα ΑΒ || ΑΓ, οπότε τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε:

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma \Leftrightarrow \alpha x_1^2 - \alpha x_2^2 + \beta x_1 - \beta x_2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha(x_1 + x_2)\cdot(x_1 - x_2) + \beta(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)\cdot[\alpha(x_1 + x_2) + \beta] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ($x_1 - x_2 = 0$ που είναι αδύνατο ή $\alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha(x_1 + x_2) = -\beta \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$

Λόγω ισοδυναμιών ισχύει και το αντίστροφο.

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και αφού ισχύει $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$, από Δ_1 ερώτημα, προκύπτει ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Δ3. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Είναι $f'(x) = 2\alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha\xi + \beta = 0 \Leftrightarrow \xi = -\frac{\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow \xi = \frac{-\frac{\beta}{\alpha}}{2} \Leftrightarrow \xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

Έστω

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$$

x	1	e	+∞
$g'(x)$	–		+
$g(x)$	↘		↗

Η συνάρτηση g είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, e]$ και
- γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$
- στο $x = e$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(e) = e$.

Δ5. Η ισότητα

$$f(\lambda + \omega\cdot\ln\varphi + \varphi\cdot\ln\omega) = f(\kappa - 2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi)$$

όταν

$$\lambda + \omega\cdot\ln\varphi + \varphi\cdot\ln\omega = \kappa - 2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi$$

ή όπως γνωρίζουμε από το ερώτημα Δ1 όταν:

$$(\lambda + \omega\cdot\ln\varphi + \varphi\cdot\ln\omega) + (\kappa - 2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Υποθέσουμε ότι:

$$\lambda + \omega\cdot\ln\varphi + \varphi\cdot\ln\omega = \kappa - 2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi$$

τότε:

$\lambda + \omega\cdot\ln\varphi + \varphi\cdot\ln\omega = \kappa - 2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega\cdot\ln\varphi + \varphi\cdot\ln\omega + 2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi = \kappa - \lambda \quad (1)$

Επειδή είναι $\omega, \varphi > 1$ ισχύει ότι $\ln\omega > 0$ και $\ln\varphi > 0$ οπότε το πρώτο μέλος της (1) είναι θετικός πραγματικός αριθμός και

$\kappa < \lambda \Leftrightarrow \kappa - \lambda < 0$ δηλαδή το δεύτερο μέλος της (1) είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Άρα η ισότητα (1) είναι αδύνατη.

Επομένως για να ισχύει η ισότητα (1) αρκεί και πρέπει

$(\lambda + \omega\cdot\ln\varphi + \varphi\cdot\ln\omega) + (\kappa - 2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\kappa + \lambda) + \omega\cdot\ln\varphi + \varphi\cdot\ln\omega - 2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow$ (όμως $\kappa + \lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$)

$\Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} + \omega\cdot\ln\varphi + \varphi\cdot\ln\omega - 2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega\cdot\ln\varphi + \varphi\cdot\ln\omega - 2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi = 0 \Leftrightarrow \omega\cdot\ln\varphi + \varphi\cdot\ln\omega = 2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\omega\cdot\ln\varphi}{\ln\omega\cdot\ln\varphi} + \frac{\varphi\cdot\ln\omega}{\ln\omega\cdot\ln\varphi} = \frac{2e\cdot\ln\omega\cdot\ln\varphi}{\ln\omega\cdot\ln\varphi} \Leftrightarrow \frac{\omega}{\ln\omega} + \frac{\varphi}{\ln\varphi} = 2e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(\omega) + g(\varphi) = 2e \quad (2)$

Από το ερώτημα Δ4 έχουμε ότι $g(x) \geq e$ για κάθε $x > 1$, οπότε και

$g(\omega) \geq e, \qquad g(\varphi) \geq e$

αν υποθέσουμε ότι $g(\omega) > e$ ή $g(\varphi) > e$, τότε $g(\omega) + g(\varphi) > 2e$, άτοπο.

Επομένως είναι $g(\omega) = e$ και $g(\varphi) = e$

Οι ισότητες αυτές ισχύουν μόνο όταν $\omega = e$ και $\varphi = e$.