1ο Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. μ 7

Α2. Αν t_1, t_2, ..., t_ν είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, τότε να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων. μ 4

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της Α; μ 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, τότε ισχύει: $P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$

β) Η αθροιστική συχνότητα N_i μίας κατανομής εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

γ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

ε) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\upsilon(t_0)=f'(t_0)$. μ 5x2

ΘΕΜΑ Β

Εστω ότι θετικές τιμές $x_1,x_2,...,x_\nu$ μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση $s=2$.
Θεωρούμε δύο δείγματα τιμών Α,Β τα οποία προκύπτουν από τις αρχικές τιμές έτσι, ώστε: στο δείγμα Α οι τιμές x_i είναι αυξημένες κατά 2 και στο δείγμα Β είναι αυξημένες κατά 10%.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\overline{x^2}=\bar{x}^2+4$. μ 5

Β2. Να βρείτε ποιο από τα δείγματα Α,Β παρουσιάζει καλύτερη ομοιογένεια. μ 5

Β3. Αν τα δύο δείγματα έχουν την ίδια μέση τιμή, να αποδείξετε ότι το αρχικό δείγμα τιμών είναι οριακά ομοιογενές. μ 5

Β4. Αν το Α δείγμα είναι ομοιογενές, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $\bar{x}$. μ 5

Β5. Αν $x_1+x_2+...+x_\nu=100$ και $x_1^2+x_2^2+...+x_\nu^2=1040$, να βρείτε το πλήθος ν των παρατηρήσεων, αν γνωρίζετε ότι $\nu>100$. μ 5

askisopolis

ΘΕΜΑ Γ

Εστω Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}+\ln(x^2+1)$, $\lambda>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. μ 4

Γ2. Να βρείτε τη τιμή του λ για την οποία το ελάχιστο της f παίρνει τη μικρότερη τιμή του. μ 6

Εστω $\lambda=1$.

Γ3. Αν $f(P(B))=P(A)$, να αποδείξετε ότι το Α είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το Β είναι αδύνατο ενδεχόμενο. μ 6

Γ4. Εστω $P(A)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(0)-f'(x)}{(x-1)^2}$, $P(B)=f'(3)$ και $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$.

i. Να εξετάσετε αν τα Α,Β είναι ασυμβίβαστα. μ 3

ii. Να υπολογίσετε τη πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

Κ: Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β. μ 3

Λ: Μόνο ένα από τα Α και Β πραγματοποιείται. μ 3

ΘΕΜΑ Δ

Εστω $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$,...,$A_{20}(x_{20},y_{20})$ σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=(x-1)^3+1$ των οποίων οι τετμημένες $x_1,x_2,...,x_{20}$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}=1$ και τυπική απόκλιση 1.

Δ1. Να βρείτε τη μέση τιμή των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτόμενων της C_f στα σημεία A_1, A_2,...,A_{20}. μ 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\sum_{i=1}^{20} f''(x_i)=0$. μ 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\overline{x^2}=2$. μ 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι οι τετμημένες των σημείων A_1, A_2,...,A_{20} βρίσκονται στο διάστημα $(-4,6)$. μ 6

Δ5. Υλικό σημείο $M(x,y)$ κινείται επί της C_f. Να βρείτε τη θέση του τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι τριπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του. μ 6

Καλή τύχη στις εξετάσεις!

Στέλιος Μιχαήλογλου

askisopolis

ΛΥΣΕΙΣ

askisopolis

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B), \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A)+N(B)$ το πλήθος των

στοιχείων του $A\cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Α2. Η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και δίνεται από τη σχέση: $\bar{x}=\dfrac{t_1+t_2+...+t_\nu}{\nu}=\dfrac{1}{\nu}\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i$

Α3. Αν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0, συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Εχουμε λοιπόν: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Α4. **α)** Σ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $s^2=\dfrac{1}{\nu}\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu}x_i^2-\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right)\Leftrightarrow 4=\dfrac{1}{\nu}\sum\limits_{i=1}^{1000}x_i^2-\bar{x}^2\Leftrightarrow 4=\overline{x^2}-\bar{x}^2\Leftrightarrow \overline{x^2}=4+\bar{x}^2$

Β2. Για τις τιμές του Α δείγματος ισχύει ότι: $y_i=x_i+2$, $i=1,2,...,\nu$, οπότε

$\bar{y}=\bar{x}+2$, $s_y=s=2$ και $CV_y=\dfrac{2}{\bar{x}+2}$.

Για τις τιμές του Β δείγματος ισχύει ότι: $z_i=x_i+\dfrac{10}{100}x_i=1{,}1x_i$, $i=1,2,...,\nu$, οπότε

$\bar{z}=1{,}1\bar{x}$, $s_z=1{,}1s=2{,}2$ και $CV_z=\dfrac{1{,}1s}{1{,}1\bar{x}}=\dfrac{2}{\bar{x}}$.

Είναι $\bar{x}+2>\bar{x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\bar{x}+2}<\dfrac{1}{\bar{x}}\Leftrightarrow\dfrac{2}{\bar{x}+2}<\dfrac{2}{\bar{x}}\Leftrightarrow CV_y<CV_z$, οπότε το Α δείγμα είναι ποιο ομοιογενές.

Β3. $\bar{y}=\bar{z}\Leftrightarrow\bar{x}+2=1{,}1\bar{x}\Leftrightarrow 2=0{,}1\bar{x}\Leftrightarrow\bar{x}=\dfrac{2}{0{,}1}=20$. Τότε $CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}=\dfrac{2}{20}=10\%$.

askisopolis

Β4. $CV_y \le 10\% \Leftrightarrow \dfrac{2}{\bar{x}+2} \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \bar{x}+2 \ge 20 \Leftrightarrow \bar{x}+2 \ge 20 \Leftrightarrow \bar{x} \ge 18$, άρα $\bar{x}_{min} = 18$

Β5. Είναι $x_1 + x_2 + ... + x_\nu = 100 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} x_i = 100$ και

$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_\nu^2 = 1010 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = 1010$.

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu} \right) \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{\nu}1040 - \frac{10000}{\nu^2} \Leftrightarrow 4\nu^2 - 1040\nu + 10000 = 0$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 921600$, $\sqrt{\Delta} = 960$ και ρίζες $\nu_1 = 10$ που απορρίπτεται ή $\nu_2 = 125$ που είναι δεκτό.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}\left(x^2+1\right)' = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Είναι $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1} \ge 0 \Leftrightarrow 2x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [0,+\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 0]$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = \dfrac{e^{\lambda-1}}{\lambda} + \ln(1) = \dfrac{e^{\lambda-1}}{\lambda}$.

askisopolis

Γ2. Εστω $g(\lambda) = \dfrac{e^{\lambda-1}}{\lambda}$, $\lambda > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$g'(\lambda) = \dfrac{e^{\lambda-1}\lambda - e^{\lambda-1}}{\lambda^2} = \dfrac{e^{\lambda-1}(\lambda-1)}{\lambda^2}$.

Είναι $g'(\lambda) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{\lambda-1}(\lambda-1)}{\lambda^2} \ge 0 \Leftrightarrow \lambda \ge 1$.

Για κάθε $\lambda > 1$ είναι $g'(\lambda) > 0 \Rightarrow g \uparrow [1,+\infty)$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$ είναι

$g'(\lambda) < 0 \Rightarrow g \downarrow (0,1]$. Η g, δηλαδή το ελάχιστο της f, γίνεται ελάχιστη για $\lambda = 1$.

Γ3. Είναι $0 \le P(B) \le 1$ και $f \uparrow [0,+\infty)$, άρα $f(0) \le f(P(B)) \le f(1) \Leftrightarrow 1 \le P(A) \le 1 + \ln 2$. Όμως $0 \le P(A) \le 1$, άρα $P(A) = 1$, οπότε το Α είναι το βέβαιο ενδεχόμενο. Τότε

$f(P(B)) = 1 \Leftrightarrow 1 + \ln\left(P^2(B)+1\right) = 1 \Leftrightarrow \ln\left(P^2(B)+1\right) = 0 \Leftrightarrow P^2(B) + 1 = 1 \Leftrightarrow$

$P^2(B) = 0 \Leftrightarrow P(B) = 0$, οπότε το Β είναι αδύνατο ενδεχόμενο.

Γ4. i. $P(A)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(0)-f'(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\dfrac{2x}{x^2+1}}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1}}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}}{(x-1)^2}\Leftrightarrow$

$P(A)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(x-1)^2}\,(x^2+1)}=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=f'(3)=\dfrac{2\cdot3}{3^2+1}=\dfrac{6}{10}$

Είναι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\Leftrightarrow$

$P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{6}{10}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{10}$

Αν τα A,B , τότε $A\cap B=\varnothing$ και $P(A\cap B)=0$ που είναι άτοπο.

ii. Είναι $K=(A\cup B)'$ και $P(K)=P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$.

Είναι $\Lambda=(A-B)\cup(B-A)$ και $P(\Lambda)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]$ (1)

Είναι $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{2}{10}$ και

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{6}{10}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{10}$.

Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα, η (1) γίνεται:

$P(\Lambda)=\dfrac{2}{10}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=3(x-1)^2$.

Οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτόμενων της C_f στα σημεία $A_1, A_2,\dots,A_{20}$ είναι

$\lambda_i=f'(x_i)=3(x_i-1)^2$

$s^2=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-1)^2=1\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-1)^2=20$.

Είναι $\bar{\lambda}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}\lambda_i}{20}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}3(x_i-1)^2}{20}=\dfrac{3\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-1)^2}{20}=3$

Δ2. $f''(x)=6(x-1)=6x-6$

$\sum\limits_{i=1}^{20}f''(x_i)=\sum\limits_{i=1}^{20}(6x_i-6)=\sum\limits_{i=1}^{20}6x_i-20\cdot6=6\sum\limits_{i=1}^{20}x_i-120=6\cdot20-120=0$

Δ3. $s^2=\dfrac{1}{20}\left(\sum\limits_{i=1}^{20}x_i^2-\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{20}x_i\right)^2}{20}\right)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}x_i^2}{20}-\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}x_i}{20}\right)^2\Leftrightarrow1=\overline{x^2}-\bar{x}^2\Leftrightarrow\overline{x^2}=1+1=2$

Δ4. Επειδή τα σημεία που βρίσκονται στο 2ο ή 4ο τεταρτημόριο έχουν $x<0$, αρκεί να δείξουμε ότι $x_i\geq0,\ i=1,2,\dots,20$.

askisopolis

Είναι $(x_i-\bar{x})^2=(x_i-1)^2\le\sum_{i=1}^{20}(x_i-1)^2=20s^2=20\Leftrightarrow|x_i-1|\le\sqrt{20}\Leftrightarrow$

$-\sqrt{20}\le x_i-1\le\sqrt{20}\Leftrightarrow 1-\sqrt{20}\le x_i\le 1+\sqrt{20}\Leftrightarrow -4<1-2\sqrt{5}\le x_i\le 1+2\sqrt{5}<6$

Δ5. Εστω $M(x(t),y(t))$ το υλικό σημείο με $y(t)=f(x(t))=(x(t)-1)^3+1$

Είναι $y'(t)=3(x(t)-1)^2x'(t)$ και

$y'(t)=3x'(t)\Leftrightarrow 3(x(t)-1)^2x'(t)=3x'(t)\Leftrightarrow(x(t)-1)^2=1\Leftrightarrow x(t)-1=\pm1$, άρα $x(t)=0$ ή $x(t)=2$

Άρα η θέση του Μ είναι στο σημείο $(0,0)$ ή στο $(2,2)$.

askisopolis