Κριτήριο αξιολόγησης έως τη Μονοτονία και τα ακρότατα συνάρτησης

2020-21

Θέμα Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

β) Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση - f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

δ) Αν μια περιττή συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο x_0, τότε θα παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $-x_0$.

ε) Αν μια άρτια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0, τότε παρουσιάζει το ίδιο είδος ακροτάτου στο σημείο $-x_0$.

στ) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

ζ) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

η) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$ τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

θ) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

ι) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

μονάδες 10

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$ τότε $f\circ g = g\circ f$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

μονάδες 4

Α4. Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη συνέχεια της πρότασης.

α) Η συνάρτηση $f(x) = |\eta\mu x - 1|$, $x \in [0, 2\pi]$ έχει μέγιστη τιμή όταν το x είναι ίσο με

Α. - 1 **Β.** 0 **Γ.** $\dfrac{\pi}{2}$ **Δ.** $\dfrac{3\pi}{2}$ **Ε.** 2

μονάδες 4

β) Η συνάρτηση $f(x)=e^x+e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ έχει:

Α. Μέγιστο το 2 για x = 0

Β. Ελάχιστο το 2 για x = 0

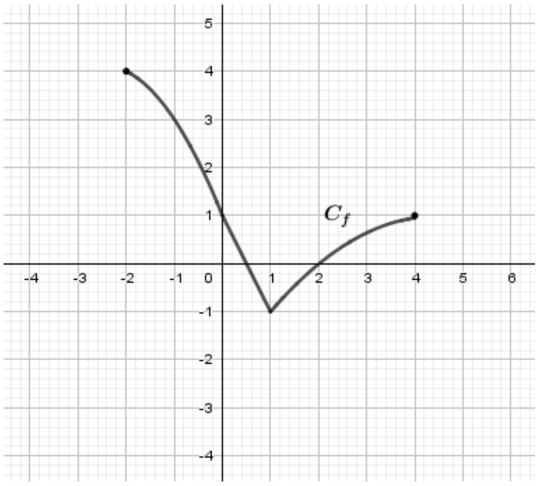
Γ. Μέγιστο το 0 για x = 2

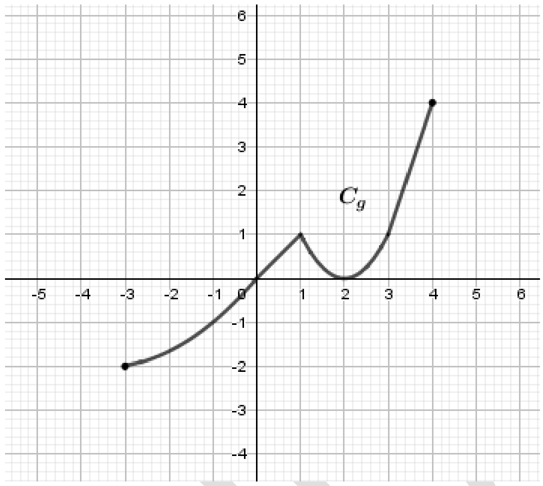
Δ. Ελάχιστο το 0 για x = 2

μονάδες 3

Θέμα Β

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g.





Β1. Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών τους.

μονάδες 3

Β2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $g\circ f$ και $f\circ g$.

μονάδες 4

Β3. Να υπολογίσετε τα $(f\circ f)(2), (f\circ g)(1), (g\circ f)(-1)$ και $(g\circ g)(3)$.

μονάδες 6

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $(f\circ g)(x)=1$.

μονάδες 4

Β5.Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $g(x)=\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$.

μονάδες 5

Β6. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in[-2,4]$ για τα οποία $f(\alpha)-f(\beta)\geq 5$.

μονάδες 3

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{|x|-\lambda x}+1,\ x\in\mathbb{R},\ \lambda\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α (1,2).

Γ1. Να δείξετε ότι λ = 0.

μονάδες 4

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστο, του οποίου να βρείτε τη θέση.

μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

μονάδες 4+4

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-x-\ln x,\ x>0$.

Δ1. Να λύσετε γεωμετρικά την εξίσωση $f(x)=0$. Στη συνέχεια να βρείτε το πρόσημο της f.

μονάδες 4+3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

μονάδες 3

Δ3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2\ln x < x - x^3$ **β)** $f(2x-1)+x+\ln x<1$

μονάδες 6

Δ4. Αν $0<\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι $\ln\frac{\beta}{\alpha}>\alpha-\beta$.

μονάδες 4

Δ5. Να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει ότι $f\left(g\left(x\right)\right)=1-e^x-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι για κάθε $x>1$ η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τη C_f.

μονάδες 5

Καλή τύχη!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

Θέμα Α

Α1.α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ στ) Λ ζ) Σ η) Σ θ) Λ ι) Λ

Α2.α) Ψευδής

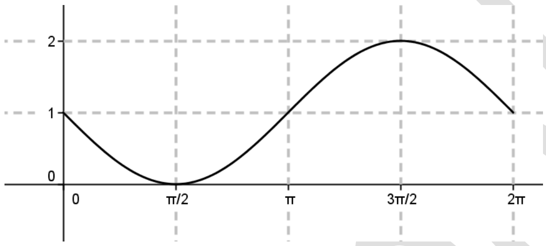
β) Έστω $f(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=x^2+1$ και $(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x+1)^2=x^2+2x+1$.

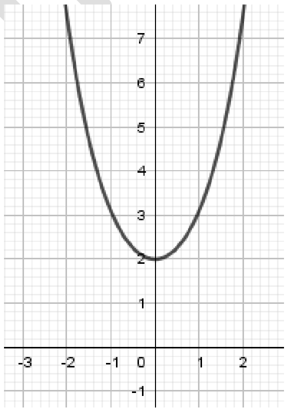
Είναι φανερό ότι $f\circ g\neq g\circ f$.

Α3. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού *Α* και για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Α4. α) Δ



β) Β



Θέμα Β

Β1. Για την f από το σχήμα προκύπτει ότι $-2\le x\le 4$ και $-1\le y\le 4$, άρα $A_f=[-2,4]$ και $f(A)=[-1,4]$.
Για την g από το σχήμα προκύπτει ότι $-3\le x\le 4$ και $-2\le y\le 4$, άρα $A_g=[-3,4]$ και $g(A)=[-2,4]$.

Β2. Είναι $A_{g\circ f}=\{x\in A_f\ /\ f(x)\in A_g\}=\{-2\le x\le 4\ /\ -3\le f(x)\le 4\}=[-2,4]$ και

$A_{f\circ g}=\{x\in A_g\ /\ g(x)\in A_f\}=\{-3\le x\le 4\ /\ -1\le g(x)\le 4\}=\{-3\le x\le 4\ /\ -1\le x\le 4\}=[-1,4]$

Β3. $(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(0)=1,\ (f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1)=-1$

$(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(3)=1\ ,\ (g\circ g)(3)=g(g(3))=g(1)=1$

Β4. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $f(x)=1\Leftrightarrow x=0$ ή $x=4$, άρα

$(f\circ g)(x)=1\Leftrightarrow f(g(x))=1\Leftrightarrow g(x)=0$ ή $g(x)=4$

$g(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$ ή $g(x)=4\Leftrightarrow x=4$

Β5. Αν κ < -2, τότε δεν υπάρχουν σημεία της C_f με y = κ, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
Αν $-2\le\kappa<0$, τότε για κάθε τιμή του κ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της C_f με y = κ, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση στη περίπτωση αυτή.
Αν κ = 0 υπάρχουν 2 σημεία της C_f με y = 0, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Αν 0 < κ < 1 υπάρχουν 3 σημεία της C_f με y = κ, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς τρείς λύσεις.
Αν κ = 1 υπάρχουν 2 σημεία της C_f με y = 1, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις.
Αν $1 \le \kappa \le 4$, τότε για κάθε τιμή του κ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της C_f με y = κ, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση στη περίπτωση αυτή.
Τέλος αν κ > 4, δεν υπάρχουν σημεία της C_f με y = κ, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Β6. Από το Β1 ισχύει ότι $-1 \le f(x) \le 4$ για κάθε $x \in [-2,4]$.
Άρα $f(\alpha) \le 4\ (1)$, $f(\beta) \ge -1 \Leftrightarrow -f(\beta) \le 1\ (2)$
Από (1) + (2) έχουμε: $f(\alpha) - f(\beta) \le 5$. Επομένως

$$f(\alpha)-f(\beta) \ge 5 \Leftrightarrow f(\alpha)-f(\beta)=5 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=4 \\ f(\beta)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=1 \end{cases}$$

Θέμα Γ

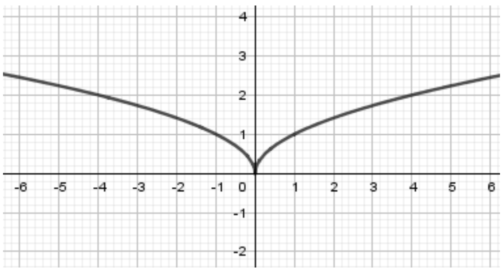
Γ1. Επειδή η C_f διέρχεται από το Α, ισχύει ότι $f(1)=1 \Leftrightarrow \sqrt{1-\lambda}+1=2 \Leftrightarrow \sqrt{1-\lambda}=1 \overset{\lambda \le 1}{\Leftrightarrow} 1-\lambda=1 \Leftrightarrow \lambda=0$

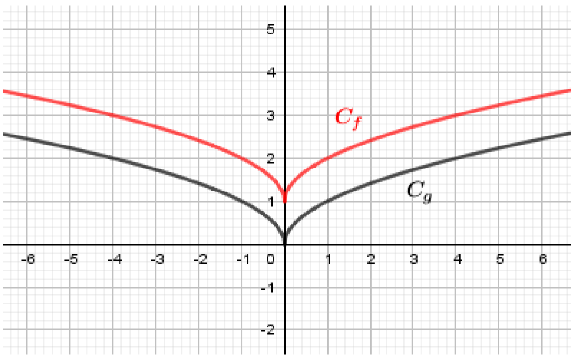
Γ2. Είναι $f(x)=\sqrt{|x|}+1=\begin{cases} \sqrt{x}+1, & x \ge 0 \\ \sqrt{-x}+1, & x<0 \end{cases}$.
Για κάθε $0 \le x_1 < x_2$ είναι $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1}+1 < \sqrt{x_2}+1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow [0,+\infty)$
Για κάθε $x_1 < x_2 < 0$ είναι
$-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow \sqrt{-x_1} > \sqrt{-x_2} \Leftrightarrow \sqrt{-x_1}+1 > \sqrt{-x_2}+1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty,0)$.

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|x| \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|}+1 \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge 1 = f(0)$, άρα η f έχει ελάχιστο το 1 για x = 0.

Γ4. Για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$. Είναι $f(-x)=\sqrt{|-x|}+1=\sqrt{|x|}+1=f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

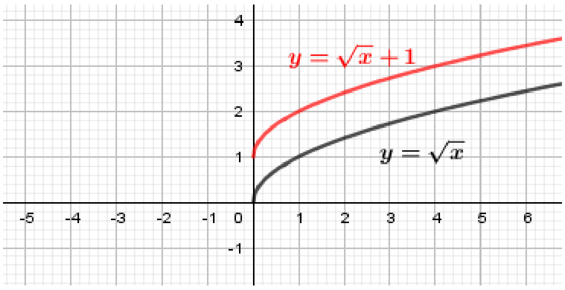
1ος τρόπος για την κατασκευή του σχήματος
Γνωρίζουμε η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{|x|}$ έχει τη διπλανή γραφική παράσταση.
Επειδή $f(x)=g(x)+1$, η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της C_g κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



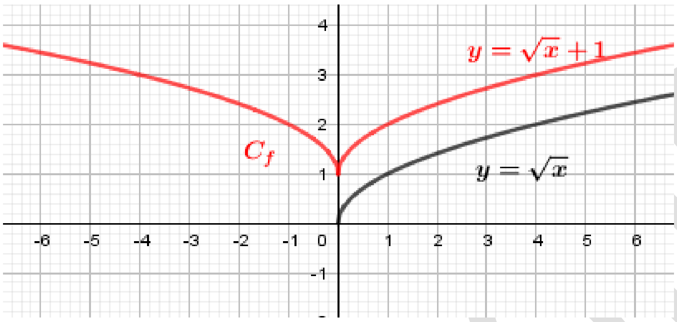


2ος τρόπος για την κατασκευή του σχήματος

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{x}$ είναι αυτή του διπλανού σχήματος και η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{x}+1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y=\sqrt{x}$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



Επειδή η f είναι άρτια, έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y, οπότε το τμήμα που λείπει είναι το συμμετρικό της $y=\sqrt{x}+1$ ως προς τον y΄y.



Θέμα Δ

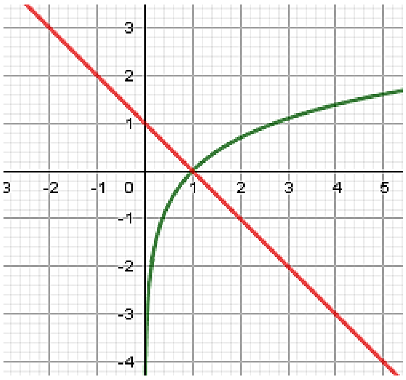
Δ1. $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-x-\ln x=0 \Leftrightarrow 1-x=\ln x$

Αρκεί να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των $y=1-x$ και $y=\ln x$

Μοναδικό κοινό σημείο των $y=1-x$ και $y=\ln x$ είναι το $(1,0)$, άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $1-x>\ln x \Leftrightarrow 1-x-\ln x>0 \Leftrightarrow f(x)>0$

και για κάθε $x>1$ είναι $\ln x>1-x \Leftrightarrow 0>1-x-\ln x \Leftrightarrow f(x)<0$.



Δ2. Έστω $0<x_1<x_2$, τότε: $-x_1>-x_2 \Leftrightarrow 1-x_1>1-x_2$ (1) και $\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1>-\ln x_2$ (2).

Από $(1)+(2) \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow f\searrow(0,+\infty)$.

Δ3. α) $2\ln x<x-x^3 \Leftrightarrow 3\ln x-\ln x<x-x^3 \Leftrightarrow -x-\ln x<-x^3-\ln x^3 \Leftrightarrow$

$1-x-\ln x<1-x^3-\ln x^3 \Leftrightarrow f(x)<f(x^3) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x>x^3 \Leftrightarrow x-x^3>0 \Leftrightarrow$

$x(1-x)(1+x)>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\in(0,1)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		–		–	0	+		+	
$1-x$		+		+		+	0	–	
$1+x$		–	0	+		+		+	
Γινόμενο		+	0	–	0	+	0	–	

β) Επειδή $D_f=(0,+\infty)$, η ανίσωση έχει νόημα όταν $x>0$ και $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Για $x>\frac{1}{2}$ είναι: $f(2x-1)+x+\ln x<1 \Leftrightarrow f(2x-1)<1-x-\ln x \Leftrightarrow$

$$f(2x-1)<f(x) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} 2x-1>x \Leftrightarrow x>\frac{1}{2} \text{ ισχύει}$$

Δ4. $\ln\frac{\beta}{\alpha} > \alpha-\beta \Leftrightarrow \ln\beta - \ln\alpha > \alpha-\beta \Leftrightarrow -\alpha-\ln\alpha > -\beta-\ln\beta \Leftrightarrow$

$1-\alpha-\ln\alpha > 1-\beta-\ln\beta \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} \alpha<\beta$ ισχύει

Δ5. Είναι $f\left(g(x)\right)=1-g(x)-\ln g(x)$ και $f\left(g(x)\right)=1-e^x-x$, άρα

$1-g(x)-\ln g(x)=1-e^x-x \Leftrightarrow 1-g(x)-\ln g(x)=1-e^x-\ln e^x \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f\left(e^x\right) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)=e^x$.

Είναι $f(x)-g(x)=1-x-\ln x-e^x$.

Για κάθε $x>1$ είναι $1-x<0$, $\ln x>0 \Leftrightarrow -\ln x<0$ και $e^x>0 \Leftrightarrow -e^x<0$, οπότε

$f(x)-g(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<g(x)$