Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

6ο Διαγώνισμα Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Α2. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ και $g(x)=-\dfrac{1}{x^4}$. Είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0}g(x)=-\infty$ όμως

$$\lim_{x\to0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{x^4}=-\infty$$

Α4.α) Η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα έχει εξίσωση της μορφής $y=\alpha x$.

Όμως $\alpha=f'(3)=\varepsilon\varphi45^\circ=1$, το σημείο Α ανήκει σ' αυτή οπότε $f(3)=3$.

β) $(f\circ f)'(3)=f'(f(3))f'(3)=f'(3)f'(3)=1$

$g(f(3))=g(3)=9-3=6$,

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=2x+\dfrac{9}{x^2}$.

$$(g\circ f)'(3)=g'(f(3))f'(3)=g'(3)=6+\frac{9}{9}=7$$

γ) $(g+f)'(3)=g'(3)+f'(3)=7+1=8$

$(g\cdot f)'(3)=g'(3)f(3)+g(3)f'(3)=7\cdot3+6\cdot1=27$

Θέμα Β

Β1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=(-\infty,\alpha)\cup(\alpha,+\infty)$.

Αν $\alpha\neq-1$ τότε $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\dfrac{1-\beta+\gamma}{\alpha+1}\in\mathbb{R}$ άτοπο.

Για $\alpha=-1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left[(1-\beta+\gamma)\dfrac{1}{x+1}\right]=-\infty$ οπότε $\alpha=-1$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+\beta x+\gamma}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+\beta x+\gamma-x^2-x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{(\beta-1)x+\gamma}{x+1}\right)$.

Αν $\beta\neq 1$ τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\beta-1)x}{x}=\beta-1\in\mathbb{R}$ άτοπο.

Για $\beta=1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\gamma}{x+1}=0$ οπότε $\beta=1$.

B2. Για $\alpha=-1,\beta=1$ έχουμε $f(x)=\dfrac{x^2+x+\gamma}{x+1}, x\neq -1, \gamma>0$

α) Έχουμε : $\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x+1\neq -1 \end{cases} \Rightarrow x\neq -2.$

Άρα υπάρχει η $f\circ g$ με $A_{f\circ g}=\mathbb{R}-\{-2\}$ και τύπο

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=\frac{(x+1)^2+x+1+\gamma}{x+2}=\frac{x^2+2x+1+x+1+\gamma}{x+2}=\frac{x^2+3x+\gamma+2}{x+2}.$$

β) Η γραφική παράσταση της $f\circ g$ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ οπότε

$$(f\circ g)(0)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \frac{2+\gamma}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2+\gamma=3\Leftrightarrow \gamma=1 \text{ και } f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}, x\neq -1.$$

B3. Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x+\cancel{x+1}-x^2\cancel{-x-1}}{(x+1)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

Έστω $\Delta\left(x_0,f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f .

Η (ε) έχει εξίσωση : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\dfrac{x_0^2+x_0+1}{x_0+1}=\dfrac{x_0^2+2x_0}{(x_0+1)^2}\cdot(x-x_0)$.

Η (ε) διέρχεται από το Γ οπότε

$$-\frac{x_0^2+x_0+1}{\cancel{x_0+1}}=\frac{x_0^2+2x_0}{(x_0+1)^{\cancel{2}}}\cdot(-1-x_0)\Leftrightarrow x_0^2+x_0+1=\frac{x_0^2+2x_0}{\cancel{x_0+1}}\cdot\cancel{(x_0+1)}\Leftrightarrow$$

$$\cancel{x_0^2}+x_0+1=\cancel{x_0^2}+2x_0\Leftrightarrow x_0=1.$$

Επομένως η (ε) έχει εξίσωση : $y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}$.

B4. ***α)*** Έχουμε $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}\geq 0\Leftrightarrow x^2+2x\geq 0\Leftrightarrow (x\leq -2)$ ή $(x\geq 0)$

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2],[0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-2,-1),(-1,0]$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -2 το $f(-2)=-3$ και τοπικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=1$

β) Έχουμε $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty} x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$.

Έστω $A_1=(-\infty,-2), A_2=[-2,-1), A_3=(-1,0]$ και $A_4=(0,+\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα αυτά έχουμε:

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-2^-} f(x)\right)=(-\infty, f(-2))=(-\infty,-3)$,

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to-1^-} f(x), f(-2)\right]=(-\infty,-3]$, $f(A_3)=\left[f(0), \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)\right)=[1,+\infty)$ και

$f(A_4)=\left(\lim\limits_{x\to0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(f(0),+\infty)=(1,+\infty)$.

Άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)\cup f(A_4)=(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

Θέμα Γ

Γ1. Η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $y-1=\dfrac{1-0}{0-(-1)}(x-0)\Leftrightarrow y=x+1$

Επειδή η ε_1 είναι εφαπτομένη της C_a στο Α, είναι $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a(x)-a(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a(x)-1}{x}=\lambda_{\varepsilon_1}=1$.

Επειδή η f είναι άρτια, η b είναι συμμετρική της a ως προς τον άξονα y΄y, οπότε για κάθε $x\geq0$ είναι $b(x)=a(-x)$.

Είναι $\lambda_2=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{b(x)-b(0)}{x}\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{a(-x)-1}{x}\ \underset{\substack{x\to0^+\Rightarrow\\ u\to0^-}}{\overset{\substack{-x=u\Leftrightarrow\\ x=-u}}{=}}\ \lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{a(u)-1}{-u}=-\lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{a(u)-1}{u}=-1$

Η εφαπτομένη ημιευθεία ε_2 της C_b στο $A(0,1)$ έχει εξίσωση: $y-b(0)=\lambda_2x\Leftrightarrow y=-x+1$

Για κάθε $x<0$ η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x)=\left(f(x)-x^2\right)'=f'(x)-2x$.

Για κάθε $x>0$ η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x)=\left(f(x)-x^2\right)'=f'(x)-2x$.

Στο $x=0$ είναι

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{a(x)-1}{x}-\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\right)=1$ και

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{b(x)-1}{x}-\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\right)=-1$, οπότε η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Γ2. Παρατηρούμε ότι $f\nearrow(-\infty,0]$ και $\searrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1<x_2\leq0$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ και $x_1^2>x_2^2\Leftrightarrow-x_1^2<-x_2^2$, άρα $f(x_1)-x_1^2<f(x_2)-x_2^2\Leftrightarrow$ $g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow g\nearrow(-\infty,0]$.

Για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)$ και $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow-x_1^2>-x_2^2$, άρα $f(x_1)-x_1^2>f(x_2)-x_2^2\Leftrightarrow$ $g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow g\searrow[0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι η f έχει μέγιστο το 1 για $x=0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\leq1=f(0)$.

Επειδή $x^2\geq0\Leftrightarrow-x^2\leq0$, είναι $f(x)-x^2\leq1\Leftrightarrow g(x)\leq g(0)$. Άρα η g έχει μέγιστο το 1 για $x=0$.

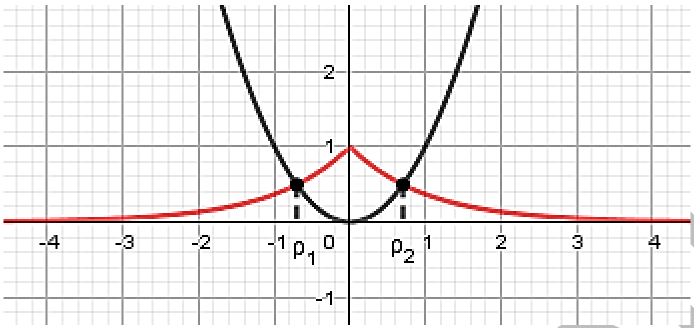
Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x^2\right)=0-\infty=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x^2\right)=0-\infty=-\infty$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_1)=(-\infty,1]$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $g(\Delta_1)$, υπάρχει μοναδικό $\rho_1\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε

$g(\rho_1)=0$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=(0,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_2)=(-\infty,1)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $g(\Delta_2)$, υπάρχει μοναδικό $\rho_2\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $g(\rho_2)=0$. Τελικά η g έχει ακριβώς 2 ρίζες.

$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-x^2=0\Leftrightarrow f(x)=x^2$ Γεωμετρικά η C_f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2$ ακριβώς σε δύο σημεία, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Γ4. $f(x-1)+xf'(x-1)+1=4x\Leftrightarrow f(x-1)+xf'(x-1)+1-4x=0\Leftrightarrow\left[xf(x-1)+x-2x^2\right]'=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=xf(x-1)+x-2x^2,\ x\in[0,1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h'(x)=f(x-1)+xf'(x-1)+1-4x$.

Είναι $h(0)=0$ και $h(1)=f(0)+1-2=0$, δηλαδή $h(0)=h(1)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi-1)+\xi f'(\xi-1)+1=4\xi$.

Γ5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\eta\mu f(x)-f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln f(x)\dfrac{1}{\eta\mu f(x)-f(x)}\right)=-\infty(-\infty)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln f(x)\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\u\to0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\eta\mu f(x)-f(x)\right)\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\u\to0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}(\eta\mu u-u)=0$ γιατί για $u>0$ είναι $|\eta\mu u|<u\Leftrightarrow-u<\eta\mu u<u$.

Θέμα Δ

Δ1. $f^2(x)=2xf(x)+x^2e^x(e^x-2)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2e^x(e^x-2)+x^2\Leftrightarrow$

$(f(x)-x)^2=x^2e^{2x}-2x^2e^x+x^2\Leftrightarrow(f(x)-x)^2=(xe^x-x)^2\Leftrightarrow|f(x)-x|=|x(e^x-1)|$ (1)

Έστω $g(x)=f(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$, τότε $g(x)=0\Leftrightarrow x(e^x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $(e^x=1\Leftrightarrow x=0)$

Για κάθε $x<0$ είναι $e^x<1\Leftrightarrow e^x-1<0$ οπότε $x(e^x-1)>0$ και για κάθε $x>0$ είναι $e^x>1\Leftrightarrow x(e^x-1)>0$, οπότε η (1) γίνεται: $|g(x)|=x(e^x-1)$ (2).

Για κάθε $x\neq0$ είναι $g(x)\neq0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Είναι $g(-2)=f(-2)+2=-\dfrac{2}{e^2}+2>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x<0$, οπότε η (2) γίνεται:

$g(x)=x(e^x-1)\Leftrightarrow f(x)-x=x(e^x-1)\Leftrightarrow f(x)=xe^x,\ x<0$

Είναι $g(1)=f(1)-1=e-1>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η (2) γίνεται:

$g(x)=x(e^x-1)\Leftrightarrow f(x)-x=x(e^x-1)\Leftrightarrow f(x)=xe^x,\ x>0$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$, ισχύει ότι $f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$, οπότε τελικά

$f(x)=xe^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Η κατακόρυφη απόσταση της C_f από την ε είναι $d=|f(x)-(x-1)|$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x+1=xe^x-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=e^x+xe^x-1=e^x(x+1)-1$ και

$h''(x)=e^x(x+1)+e^x=e^x(x+2)$.

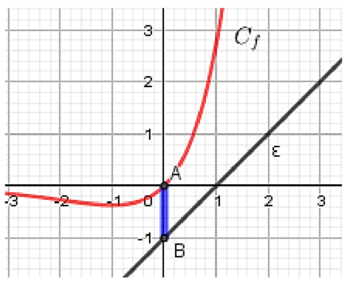
Είναι $h''(x)\geq0\Leftrightarrow e^x(x+2)\geq0\Leftrightarrow x+2\geq0\Leftrightarrow x\geq-2$.

Για κάθε $x<-2$ είναι $h''(x)<0$ και επειδή η h' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$.

Για κάθε $x>-2$ είναι $h''(x)>0$ και επειδή η h' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,+\infty)$.

Είναι $h'(-2)=-\frac{1}{e}-1<0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}h'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xe^x+e^x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+e^x-1\right]=-1$ γιατί από το σχήμα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

Παρατηρούμε ότι $h'(0)=0$, οπότε για κάθε $-2<x<0\overset{h'\nearrow}{\Rightarrow}h'(x)<h'(0)=0\Rightarrow h\searrow[-2,0]$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $x=-2$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.



Για κάθε $x>0\overset{h'\nearrow}{\Rightarrow}h'(x)>h'(0)=0\Rightarrow h\nearrow[0,+\infty)$.

Η h έχει ελάχιστο το $h(0)=f(0)+1=1$, άρα

$h(x)\geq h(0)=1>0\Rightarrow f(x)>x-1$, οπότε

$d=f(x)-(x-1)=h(x)$ και $d_{min}=1$

Παρατηρήσεις για το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x$

Το όριο θα μπορούσε να υπολογιστεί και με το θεώρημα του De L' Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$$

Ακόμη σε μια πρόσφατη εργασία του κυρίου Πολύζου με τίτλο αξιοσημείωτα όρια έχει τον εξής τρόπο για το συγκεκριμένο όριο:

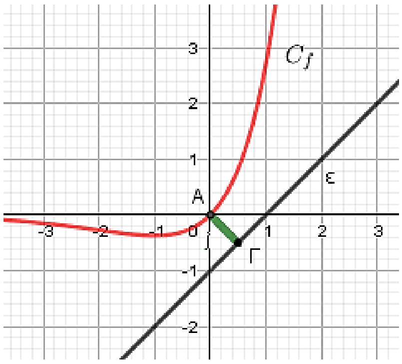
$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\u\to+\infty}}{\overset{-x=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{-u}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{-1}{\frac{e^u}{u}}\underset{\substack{u\to+\infty\Rightarrow\\t\to+\infty}}{\overset{\frac{e^u}{u}=t}{=}}\lim_{t\to+\infty}\frac{-1}{t}=0$$ γιατί για $u>0$ είναι

$$\frac{e^u}{u}=\frac{\left(e^{\frac{u}{2}}\right)^2}{u}\geq\frac{\left(\frac{u}{2}+1\right)^2}{u}>\frac{\left(\frac{u}{2}\right)^2}{u}=\frac{\frac{u^2}{4}}{u}=\frac{u}{4}$$ και $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{4}=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u}=+\infty$

Δ3. Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f. Τότε $y = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι ε: $y = x-1 \Leftrightarrow x-y-1=0$.

Η απόσταση του Μ από την ε, είναι:

$$d(M,\varepsilon) = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|x-xe^x-1|}{\sqrt{2}} = \frac{|-h(x)|}{\sqrt{2}} \overset{h(x)\ge 1}{=} \frac{h(x)}{\sqrt{2}}$$



Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) \ge h(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow d(M,\varepsilon) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$

άρα $d(M,\varepsilon)_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ για $x=0$, άρα όταν $M(0,0)$.

Δ4. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[5,6]$, $[6,7]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (5,6)$, $\xi_2 \in (6,7)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f(6)-f(5) = 6e^6-5e^5$ και $f'(\xi_2) = f(7)-f(6) = 7e^7-6e^6$

Είναι $f'(x) = xe^x + x$ και $f''(x) = xe^x + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in (5,7)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[5,7]$. Είναι $\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow 6e^6-5e^5 < 7e^7-6e^6 \Leftrightarrow 12e^6 < 7e^7+5e^5 \Leftrightarrow e^6 < \frac{7e^7+5e^5}{12}$