

Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας



2019 - 2020



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

μονάδες 5

A2. Ποια συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f ; Πως ορίζεται η νιοστή παράγωγος μιας συνάρτησης f με $n \geq 3$;

μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Έστω μία συνάρτηση μη σταθερή η οποία δεν είναι ευθεία της μορφής $y = ax + \beta$ με $a \neq 0$ και $a, \beta \in \mathbb{R}$, τότε δεν γίνεται η γραφική της παράσταση να έχει κοινό σημείο με μία ασύμπτωτή της»

α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

μονάδες 1+3

A4. Έχουμε την παρακάτω διαδικασία:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\frac{1}{u^2} + 1} \left(-\frac{1}{u^2} \right) du = -\int_{-1}^1 \frac{1}{u^2 + 1} du = -I \Leftrightarrow I = -I \Leftrightarrow I = 0$$

Θέσαμε $x = \frac{1}{u}$ οπότε $dx = -\frac{1}{u^2} du$. Προφανώς το αποτέλεσμα είναι άτοπο καθώς $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx > 0$

αφού $\frac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Να εντοπίσετε το λάθος και να δικαιολογήσετε γιατί είναι λάθος.

μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λάθος**. Σε κάθε **Λάθος** πρόταση να αντικαταστήσετε μία λέξη με κάποια άλλη ή να συμπληρώσετε μία λέξη ώστε η πρόταση να γίνει **Σωστή**. Οι λέξεις που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ώστε να αλλάξετε τις προτάσεις είναι οι βασικές λέξεις (και, ή, είναι, του, το, τα, η, ο, οι κλπ), ώστε να συμπληρωθεί το νόημα και οι προτεινόμενες που δίνονται παρακάτω. Δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσετε όλες τις προτεινόμενες λέξεις.

Προτεινόμενες Λέξεις:

Παραγωγίσιμη, $\left(\int_a^b f(x) dx \right)' = 0$, Υποσύνολο, Συνεχής, οριζόντια, σύνολο τιμών.

α) Αν μία συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το A και η παράγωγός της έχει πεδίο ορισμού το B τότε θα ισχύει πάντα ότι το B ισούται με το A .

β) Αν $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ τότε $\left(\int_a^b f(x) dx \right)' = \int_a^b f'(x) dx$.

γ) Μία συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R} δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

μονάδες 6

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $(f \circ g)(x) = \frac{4x^2 - 4x + 5}{2x - 1}$, $x \neq \frac{1}{2}$ και $g(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$, $x \neq 0$.

μονάδες 3

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 3

B3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

μονάδες 3

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και με βάση τα προηγούμενα, να σχεδιάσετε πρόχειρα τη γραφική της

μονάδες 5

B5. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτομένες είναι κάθετες στην $y = x$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

μονάδες 4

B6. Έστω $M(x, y)$, $x < 0$ ένα σημείο που κινείται πάνω στη C_f και η τετμημένη του M μειώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Τη χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο $(-4, -5)$, να βρείτε :

α) τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M ,

β) τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\hat{M}Ox = \theta$

μονάδες 3 + 4

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(0) = 0$ για την οποία ισχύει ότι

$$9x^2 + 2f(1) - 2 \leq 3f'(x) \leq 9x^2 - 4f(1) - 4 + f(2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x^3$.

μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha, \alpha^3)$, $\alpha \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο N εκτός του M . Στη συνέχεια να δείξετε ότι στο σημείο N η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο M .

μονάδες 4

Γ4. Αν $x > 0$, να βρείτε για ποια τιμή του $x \in (0, 1)$ η κατακόρυφη απόσταση των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} γίνεται μέγιστη.

μονάδες 6

Γ5. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7x - 4$

μονάδες 5

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

• $2f'(x) + x(f'(x))^2 + xf''(x) = -\frac{e^{-f(x)}}{x^2}$ για κάθε $x > 1$,

• $f(e) = -1$ και

• $f'(e) = 0$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xe^{f(x)} - \ln x$, $x > 1$ είναι σταθερή και να βρείτε την τιμή της.

μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(\ln x) - \ln x$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x > 1$.

μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτομένες έχουν αντίθετες κλίσεις.

μονάδες 6

Δ5. Να δείξετε ότι $\int_e^{e^2} f(x) dx < e^2(\ln 2 - 1) - \ln(e + 1)$

μονάδες 5