

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Υλη: Έως εύρεση συνάρτησης

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

Εστω ότι η εξίσωση $3x^2 - 6|z|x = -4|w - 3 - 4i|$, $x \in \mathbb{R}$, $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ έχει μια διπλή ρίζα το 2.

A1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας M του μιγαδικού στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 2$, και ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας N του μιγαδικού w είναι κύκλος με κέντρο K(3, 4) και ακτίνα $\rho_2 = 3$. **μ 6**

A2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους. **μ 4**

A3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος a) να αποδείξετε ότι: $|z+w| \leq 10$ **μ 4**

A4. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|z^2 - 3z - 4|$. **μ 5**

A5. Εστω w_1, w_2 δύο από τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύει ότι $|w_1 - w_2| = 4$ και $\text{Im}(w_1 - w_2) = 0$. Να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = \sqrt{30 - 8\sqrt{5}}$. **μ 6**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνωσίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 5}{x} = 4 \quad \text{και} \quad 2\eta f'(x-1) + 10(x-1)^2 \leq (x-1)f(x) \leq 8x^2 - 14x + 6 \quad \text{για κάθε } x \in (0, 1).$$

B1. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. **μ 5**

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x) = f(x) - \ln x - 4$, $x \in (0, 1)$. **μ 5**

B3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e^{f(x)-4}$ τέμνει την $y = x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$. **μ 7**

B4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe^{\lambda+4} = e^{f(x)}$ στο διάστημα $(0, 1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. **μ 8**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει ότι $f''(x) + f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. $\mu 2$

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της f . $\mu 3$

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. $\mu 3$

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f(\beta) - f(\alpha) \leq 4(\beta - \alpha)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \leq \beta$. $\mu 4$

Γ5. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 1821$. $\mu 3$

Γ6. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. $\mu 2$

Γ7. Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} . $\mu 5$

Γ8. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και $B(17, 4)$ ανήκουν στην C_f . $\mu 3$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x)e^{2y} + f(y)e^{2x} + e^{2x+2y} - 1 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } f'(0) = -1.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2f(x) + e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. $\mu 6$

Δ2. Να βρείτε τον τύπο της f . $\mu 5$

Δ3. Να αποδείξετε ότι $(2\alpha + 1)e^{2\alpha}(\beta - \alpha) \leq \beta e^{2\beta} - \alpha e^{2\alpha} \leq (2\beta + 1)e^{2\beta}(\beta - \alpha)$ για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. $\mu 7$

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln f(x) + 5 = \ln(x^2 + 1) - x^3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$. $\mu 7$

Καλή τύχη!

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. $3x^2 - 6|z|x = -4|w-3-4i| \Leftrightarrow 3x^2 - 6|z|x + 4|w-3-4i| = 0$

Επειδή η εξίσωση έχει ρίζα το 2, ισχύει ότι:

$$12 - 12|z| + 4|w-3-4i| = 0 \Leftrightarrow |w-3-4i| = 3|z| - 3 \quad (1)$$

Επειδή η είσωση είναι 2ου βαθμού και η ρίζα είναι διπλή, ισχύει ότι:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 36|z|^2 - 48|w-3-4i| = 0 \Leftrightarrow 4|w-3-4i| = 3|z|^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 12|z| - 12 = 3|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 - 4|z| + 4 = 0 \Leftrightarrow (|z|-2)^2 = 0 \Leftrightarrow |z| = 2 \text{ και από την (1)} \Rightarrow |w-3-4i| = 3$$

A2. Είναι $(OK) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = \rho_1 + \rho_2$, άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και έχουν ένα

μόνο κοινό σημείο. Οπότε υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

A3. Επειδή η οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, ισχύει ότι $(MN)_{\max} = 2\rho_1 + 2\rho_2 = 10 \Leftrightarrow |z-w| \leq 10$. Όμως το συμμετρικό κάθε σημείου M ως προς την αρχή των αξόνων είναι σημείο του ίδιου κύκλου, άρα και την εικόνα N' του $-z$ ισχύει ότι $(MN')_{\max} = 10 \Leftrightarrow |-z-w| \leq 10 \Leftrightarrow |z+w| \leq 10$

A4. $|z^2 - 3z - 4| = |z^2 - 3z - |z|^2| = |z^2 - 3z - z\bar{z}| = |z||z - \bar{z} - 3| = 2|2yi - 3| = 2\sqrt{9 + 4y^2}$

Είναι $|z| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow |y| \leq 2$ με την ισότητα να ισχύει για τους $z = \pm 2i$. Άρα $y^2 \leq 4 \Leftrightarrow 4y^2 \leq 16 \Leftrightarrow 4y^2 + 9 \leq 25 \Leftrightarrow \sqrt{4y^2 + 9} \leq 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{4y^2 + 9} \leq 10 \Leftrightarrow |z^2 - 3z - 4| \leq 10$, άρα $|z^2 - 3z - 4|_{\max} = 10$ για $z = \pm 2i$.

A5. Εστω B, Δ οι εικόνες των w_1, w_2 αντίστοιχα. Τότε

$$|w_1 + w_2| = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}| = 2|\overrightarrow{OZ}|$$

$$\text{Επειδή } \operatorname{Im}(w_1 - w_2) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(w_1) = \operatorname{Im}(w_2) \Leftrightarrow y_B = y_\Delta,$$

το τμήμα $B\Delta$ είναι παράλληλο στον x ' x

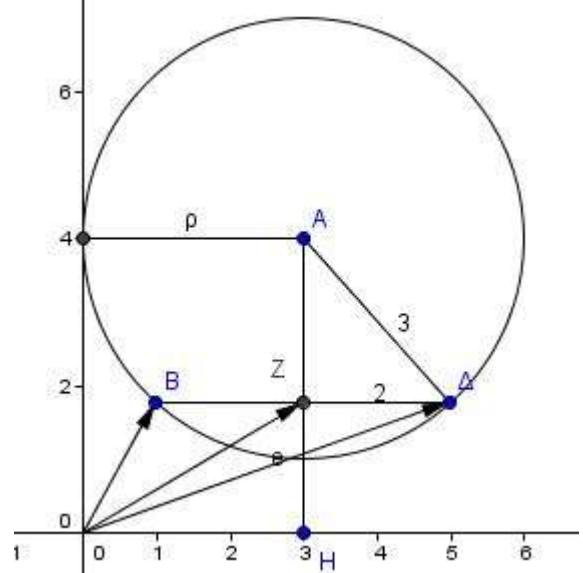
Από το πυθαγόρειο στο τρίγωνο $AZ\Delta$ προκύπτει ότι

$$(AZ) = \sqrt{5}. \text{ Τότε } (ZH) = 4 - \sqrt{5}$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OZH

$$\text{έχουμε: } (OZ) = \sqrt{30 - 8\sqrt{5}}. \text{ Άρα}$$

$$|w_1 + w_2| = \sqrt{30 - 8\sqrt{5}}$$



ΘΕΜΑ Β

B1 Εστω $\sigma(x) = \frac{f(x)-5}{x}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \sigma(x) = 4$, τότε $f(x) = x\sigma(x) + 5$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5$

$$2\eta\mu(x-1) + 10(x-1)^2 \leq (x-1)f(x) \leq 8x^2 - 14x + 6 \stackrel{x < 1}{\Leftrightarrow} 2 \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + 10(x-1) \geq f(x) \geq \frac{(x-1)(8x-6)}{x-1} \text{ με}$$

$$\text{κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2.$$

B2 Εύκολα αποδεικνύεται ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$$h(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \right) = (-2, +\infty)$$

B3 Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $e^{f(x)-4} = x$ έχει ακριβώς μία λύση $x_0 \in (0, 1)$.

Εστω $\varphi(x) = e^{f(x)-4} - x$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η φ είναι ↓ στο $(0, 1)$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = e, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = e^{-2} - 1. \text{ Άρα } \varphi(x) = \left(\frac{1}{e^2} - 1, e \right) \text{ και } 0 \in \varphi(A)$$

B4 Η εξίσωση γίνεται $\frac{x e^\lambda}{e^{-u}} = e^{f(x)} \Leftrightarrow x e^\lambda = e^{f(x)-4}$. Θεωρώ $\omega(x) = e^{f(x)-4} - x e^\lambda$ που είναι ↓ και έχει σύνολο τιμών $\left(\frac{1}{e^2} - e^\lambda, e \right)$

- Άν $\frac{1}{e^2} - e^\lambda < 0 \Rightarrow e^\lambda > e^{-2} \Rightarrow \lambda > -2$ τότε η εξίσωση έχει μία λύση.
- Άν $\frac{1}{e^2} - e^\lambda \geq 0$ δηλαδή $\lambda \leq 2$ καμία λύση.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Για $x=0$ είναι:

$$f^3(0) + f(0) = 4 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ ή } f^2(0) = -1 \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Γ2 $f^3(x) + f(x) = 4x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = 4x \Leftrightarrow f(x) = \frac{4x}{f^2(x) + 1} \quad (2)$.

Είναι $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{f^2(x) + 1} > 0 \Leftrightarrow 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και

$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{f^2(x) + 1} < 0 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Γ3 Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , έχουμε:

$$(f^3(x) + f(x))' = (4x)' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 4 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) + 1) = 4 \quad (3).$$

Επειδή $3f^2(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Γ4 Άν $a = \beta$, τότε $f(a) - f(a) \leq 4(a - a)$ και ισχύει η ισότητα.

Άν $a < \beta$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη

στο (a, β) , λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$.

Όμως από τη σχέση (3) είναι $f'(x) = \frac{4}{3f^2(x) + 1} \leq 4$, αφού $3f^2(x) + 1 \geq 1$, άρα και

$f'(\xi) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \leq 4 \Leftrightarrow f(\beta) - f(a) \leq 4(\beta - a)$.

Γ5 Πρέπει $f'(x) = 1$, τότε $(3) \Rightarrow 3f^2(x) + 1 = 4 \Leftrightarrow f^2(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \pm 1$

Αν $f(x) = 1$, τότε από την αρχική σχέση έχουμε: $1^3 + 1 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ και η

$$\text{εφαπτομένη είναι } \eta: y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - 1 = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}$$

Αν $f(x) = -1$, τότε από την αρχική σχέση έχουμε: $(-1)^3 - 1 = 4x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ και η

$$\text{εφαπτομένη είναι } \eta: y - f\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y + 1 = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}$$

Γ6 Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Rightarrow y^3 + y = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(y^3 + y), \text{άρα } f^{-1}(y) = \frac{1}{4}(y^3 + y)$$

$$\Gamma 7 \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4}x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \underset{\substack{f(x)=y \\ x=f^{-1}(y)}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} y = +\infty \text{ και όμοια } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \text{άρα } f(A) = \mathbb{R}.$$

$$\Gamma 8 \quad f^{-1}(1) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ και } f^{-1}(4) = \frac{1}{4}(64+4) = \frac{68}{4} = 17 \Leftrightarrow f(17) = 4$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Για $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

Παραγωγίζοντας ως προς y , έχουμε: $f'(x+y) = f'(x)e^{2y} + 2f(y)e^{2x} + 2e^{2x+2y}$ και

για $x = 0$: $f'(y) = f(y) + e^{2y}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$, άρα και $f'(x) = f(x) + e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\Delta 2 \quad f'(x) = f(x) + e^{2x} \Leftrightarrow e^{-2x}f'(x) - e^{-2x}f(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{-2x}f(x))' = (x)' \Leftrightarrow \\ e^{-2x}f(x) = x + c \Leftrightarrow f(x) = (x+c)e^{2x}, x \in \mathbb{R} \quad f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0, \text{άρα } f(x) = xe^{2x}, x \in \mathbb{R}.$$

Δ3 Εστω $\alpha < \beta$. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$f'(x) = (1+2x)e^{2x}$, οπότε λόγω του ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow (2\xi + 1)e^{2\xi} = \frac{\beta e^{2\beta} - \alpha e^{2\alpha}}{\beta - \alpha}$$

Είναι $\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow 2\alpha + 1 < 2\xi + 1 < 2\beta + 1$ (1) και $\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow e^{2\alpha} < e^{2\xi} < e^{2\beta}$ (2)

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1),(2), έχουμε:

$$(2\alpha + 1)e^{2\alpha} < (2\xi + 1)e^{2\xi} < (2\beta + 1)e^{2\beta} \Leftrightarrow (2\alpha + 1)e^{2\alpha} < \frac{\beta e^{2\beta} - \alpha e^{2\alpha}}{\beta - \alpha} < (2\beta + 1)e^{2\beta} \Leftrightarrow$$

$$(2\alpha + 1)e^{2\alpha}(\beta - \alpha) < \beta e^{2\beta} - \alpha e^{2\alpha} < (2\beta + 1)e^{2\beta}(\beta - \alpha)$$

Ομοια αν $\alpha > \beta$ και αν $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα.

$$\Delta 4 \quad \ln f(x) + 5 = \ln(x^2 + 1) - x^3 \Leftrightarrow \ln f(x) - \ln(x^2 + 1) = -x^3 - 5 \Leftrightarrow \ln \frac{f(x)}{x^2 + 1} = -x^3 - 5 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2 + 1} = e^{-x^3 - 5}$$

$$\text{Εστω } g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1} - e^{-x^3 - 5}, x \in [0, 1].$$

Είναι $g(0) = -e^5 < 0$, $g(1) = e^2 - 2e^{-6} > 0$ και για συνεχής οπότε από Θ.Β η
 $g(x) = 0 \frac{f(x)}{x^2 + 1} - e^{-x^3 - 5} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \ln(f(x) + 5) = \ln(x^2 + 1) - x^3$ έχει τουλάχιστον μία
ρίζα στο $(0, 1)$.