15η Επαναληπτική

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ για την οποία ισχύει ότι:
$f(4)=4$, $f'(4)=0$ και $\left(f'(x)\right)^2+f(x)f''(x)=-1$ για κάθε $x\in(0,8)$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,8)$.

2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{8x-x^2}$.

3. Αν Α,Β δύο τυχαία σημεία της γραφικής παράστασης της f, να αποδείξετε ότι $(AB)\le 8$.

4. Να υπολογίσετε το $\int_0^4\sqrt{8x-x^2}\,dx$.

5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=(4-x)f(x)$, τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία $x=4$.

6. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f^2(\rho)=-\rho^4+2\rho^3-4\rho^2+16\rho-4$.

7. Να υπολογίσετε τα όρια: **α)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{\eta\mu x}$

8. Να ορίσετε την συνάρτηση $f\circ f$ και να την εξετάσετε ως προς την μονοτονία.

9. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi,f(\xi))$ της C_f με $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο Μ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x\sqrt{7}+2018$.

10. Έστω F αρχική της f με $F(0)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $1<F(4)<17$.

β) $F(x)\le\dfrac{1}{4}\left(F(4)-1\right)x+1$ για κάθε $x\in[0,4]$.

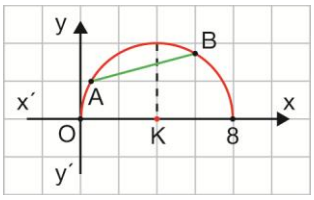
Λύση

1. Είναι $\left[f'(x)\right]^2+f(x)\cdot f''(x)=-1\ \ (1)$. Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,8)$ τότε αφού η f είναι συνεχής στο $(0,8)$, θα έχει ρίζα $\rho\in(0,8)$ δηλαδή $f(\rho)=0$. Στην (1) για $x=\rho$ προκύπτει $\left[f'(\rho)\right]^2=-1$ άτοπο. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού είναι συνεχής και $f(4)=4>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,8)$.

2. $(1)\Rightarrow\left[f(x)f'(x)\right]'=(-x)'\Leftrightarrow f(x)f'(x)=-x+c_1$. Για $x=4$ προκύπτει $c=4$ άρα

$f(x)f'(x)=4-x\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=8-2x\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(8x-x^2\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=8x-x^2+c_2$ και για $x=4$ είναι $16=32-16+c_2\Leftrightarrow c_2=0$, άρα $f^2(x)=8x-x^2$ και αφού $f(x)>0$ τότε $f(x)=\sqrt{8x-x^2}$.

3. Έστω $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{8x-x^2}=y\Leftrightarrow 8x-x^2=y^2\Leftrightarrow$ $x^2+y^2-8x+16=16\Leftrightarrow(x-4)^2+y^2=16$, οπότε αφού $y\geq 0$ τότε η γραφική παράσταση της f είναι το ημικύκλιο που βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ του κυκλικού δίσκου που έχει κέντρο $K(4,0)$ και $\rho=4$. Αν Α, Β δύο τυχαία σημεία της C_f τότε $AB\leq 2\rho\Leftrightarrow(AB)\leq 8$.



4. Είναι $I=\int_0^4\sqrt{8x-x^2}\,dx$ με βάση το προηγούμενο ερώτημα το ζητούμενο ολοκλήρωμα εκφράζει το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου οπότε $I=\dfrac{\pi\cdot 4^2}{4}=4\pi$.

5. Αφού $f(x)>0$ και $4-x\geq 0$ για $x\in[0,4]$ τότε $g(x)\geq 0$ όταν $x\in[0,4]$.

Συνεπώς $E(\Omega)=\int_0^4 g(x)dx=\int_0^4(4-x)\sqrt{8x-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^4(8-2x)\sqrt{8x-x^2}dx$.

Θέτουμε $u=8x-x^2$ άρα $du=(8-2x)dx$ και

x	0	4
u	0	16

Άρα $E(\Omega)=\dfrac{1}{2}\int_0^{16}\sqrt{u}du=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{16}=\dfrac{1}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^{16}=\dfrac{1}{3}16\sqrt{16}=\dfrac{64}{3}$ τ.μ.

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=f^2(x)+x^4-2x^3+4x^2-16x+4=8x-x^2+x^4-2x^3+4x^2-16x+4=x^4-2x^3+3x^2-8x+4$.

Επειδή $g(2)=16-16+12-16+4=0$ παραγοντοποιούμε την g και έχουμε:

$g(x)=(x-2)\left(x^3+3x-2\right)$

1	-2	3	-8	4	ρ=2
	2	0	6	-4	
1	0	3	-2	0	

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x)=x^3+3x-2,\ x\in[0,2]$.

Είναι $\alpha(0)=-2,\ \alpha(2)=12$, δηλαδή $\alpha(0)\alpha(2)<0$ και επειδή η α είναι συνεχής ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $\alpha(x_1)=0\Leftrightarrow x_1^3+3x_1-2=0$. Τότε $g(x)=(x_1-2)\left(x_1^3+3x_1-2\right)=0$.

7. α) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,8)$, είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}-\dfrac{x}{\eta\mu x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}-\dfrac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}}\right)=+\infty-1=+\infty$ γιατί

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4-x}{\sqrt{8x-x^2}}}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4-x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{1}{f(x)}\right)=4(+\infty)=+\infty$$

8. Για το πεδίο ορισμού της $f\circ f$ έχουμε: $\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in[0,8] \\ f(x)\in[0,8] \text{ ισχύει}\end{cases}$ (από τη γραφική παράσταση της f διαπιστώνουμε ότι $y=f(x)\in[0,4]$) .Οπότε $A_{f\circ f}=[0,8]$.

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\sqrt{8f(x)-f^2(x)}=\sqrt{8\sqrt{8x-x^2}-8x+x^2}$.

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[4,8]$.

Είναι $0\le x_1<x_2\le 4\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(f(x_1))<f(f(x_2))\Leftrightarrow(f\circ f)(x_1)<(f\circ f)(x_2)\Rightarrow f\circ f\nearrow[0,4]$

και $4\le x_1<x_2\le 8\overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x_2)\underset{f(x_1),f(x_2)\in[0,4]}{\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}} f(f(x_1))>f(f(x_2))\Leftrightarrow(f\circ f)(x_1)>(f\circ f)(x_2)\Rightarrow$

$f\circ f\searrow[4,8]$.

9. Αρκεί να υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\sqrt{7}$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1}=\sqrt{7}$.

10.α) Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0,4]$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,4)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_1)=\frac{F(4)-F(0)}{4}\Leftrightarrow f(\xi_1)=\frac{F(4)-1}{4}$$

Επειδή $\xi_1\in(0,4)$, είναι $0<f(\xi_1)<4\Leftrightarrow 0<\dfrac{F(4)-1}{4}<4\Leftrightarrow 0<F(4)-1<16\Leftrightarrow 1<F(4)<17$.

β) Για $x=0$ είναι $F(0)\le\frac{1}{4}(F(4)-1)\cdot 0+1=1$ ισχύει η ισότητα.

Για $x=4$ είναι $F(4)\le\frac{1}{4}(F(4)-1)\cdot 4+1=F(4)$ ισχύει και πάλι η ισότητα.

Έστω $x\in(0,4)$.

Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[0,x]$, $[x,4]$ οπότε υπάρχει $\xi_2\in(0,x)$ και $\xi_3\in(x,4)$ τέτοια, ώστε:

$$F'(\xi_2)=\frac{F(x)-F(0)}{x}\Leftrightarrow f(\xi_2)=\frac{F(x)-1}{x}\quad\text{και}\quad F'(\xi_3)=\frac{F(4)-F(x)}{4-x}\Leftrightarrow f(\xi_3)=\frac{F(4)-F(x)}{4-x}.$$

Είναι $\xi_2<\xi_3\overset{f\nearrow[0,4]}{\Leftrightarrow} f(\xi_2)<f(\xi_3)\Leftrightarrow\dfrac{F(x)-1}{x}<\dfrac{F(4)-F(x)}{4-x}\Leftrightarrow$

$4F(x)-4-\cancel{xF(x)}+x<xF(4)-\cancel{xF(x)}\Leftrightarrow 4F(x)<xF(4)-x+4\Leftrightarrow F(x)<\frac{1}{4}(F(4)-1)x+1$.