Ευκλείδεια εναντίον Αναλυτικής Γεωμετρίας

Ευκλείδης (325 π.Χ. - 265 π.Χ)

Descartes (1596 - 1650)

Στέλιος Μιχαήλογλου

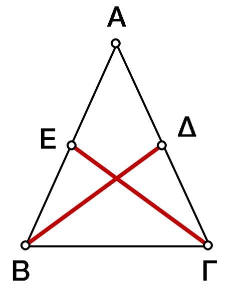
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

34 ασκήσεις λυμένες με χρήση Ευκλείδειας Γεωμετρίας και Αναλυτικής Γεωμετρίας. Μια προσπάθεια να συγκρίνει ο μαθητής τους διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης των δύο Γεωμετριών και να κατανοήσει την αναγκαιότητά τους.

1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσες.

Λύση

Ευκλείδεια



Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν: ΒΓ πλευρά κοινή

$ΒΕ = ΓΔ$ μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ

$\hat{Β} = \hat{Γ}$ στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα, οπότε είναι και $ΒΔ = ΓΕ$.

Διανύσματα

Εστω $|\overrightarrow{ΑΒ}| = |\overrightarrow{ΑΓ}| = α > 0$

$\overrightarrow{ΒΔ} = \overrightarrow{ΑΔ} - \overrightarrow{ΑΒ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΑΒ}$, άρα

$$|\overrightarrow{ΒΔ}|^2 = \left|-\overrightarrow{ΑΒ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΓ}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΑΒ}\right)^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{ΑΓ}^2 - \overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΑΒ}^2 = |\overrightarrow{ΑΒ}|^2 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{ΑΓ}|^2 - \overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ} \Leftrightarrow$$

$$|\overrightarrow{ΒΔ}|^2 = α^2 + \frac{α^2}{4} - \overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ} = \frac{5α^2}{4} - \overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}$$

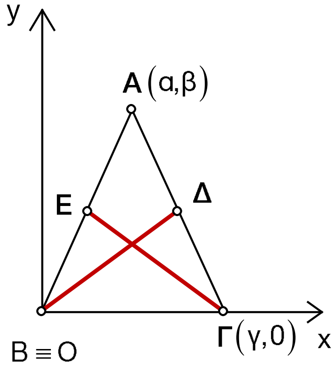
Είναι $\overrightarrow{ΓΕ} = \overrightarrow{ΑΕ} - \overrightarrow{ΑΓ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΓ}$ και

$$|\overrightarrow{ΓΕ}|^2 = \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΓ}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΓ}\right)^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{ΑΒ}^2 - \overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΑΓ}^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{ΑΒ}|^2 - \overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ} + |\overrightarrow{ΑΓ}|^2 \Leftrightarrow$$

$$|\overrightarrow{ΓΕ}|^2 = \frac{α^2}{4} - \overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ} + α^2 = \frac{5α^2}{4} - \overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}$$

Άρα $|\overrightarrow{ΒΔ}|^2 = |\overrightarrow{ΓΕ}|^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{ΒΔ}| = |\overrightarrow{ΓΕ}|$.

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(α,β)$ και η κορυφή $Γ(γ,0)$.

Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε:

$(ΑΒ) = (ΑΓ) \Leftrightarrow \sqrt{α^2+β^2} = \sqrt{(α-γ)^2+β^2} \Leftrightarrow α^2+β^2 = α^2-2αγ+γ^2+β^2 \Leftrightarrow$

$γ^2 - 2αγ = 0 \Leftrightarrow γ(γ-2α) = 0 \Leftrightarrow γ = 0$ που είναι αδύνατο ή

$γ = 2α$. Τότε $Γ(2α,0)$.

Επειδή το Δ είναι μέσο του ΑΓ είναι: $x_Δ = \frac{x_Α + x_Γ}{2} = \frac{3α}{2}$ και $y_Δ = \frac{y_Α + y_Γ}{2} = \frac{β}{2}$, άρα $Δ\left(\frac{3α}{2}, \frac{β}{2}\right)$ και

$$(B\Delta)=\sqrt{\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}}.$$

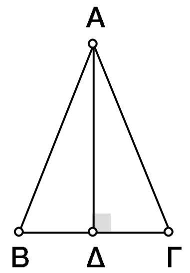
Επειδή το Ε είναι μέσο του ΑΒ είναι: $x_E=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$ και $y_E=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{\beta}{2}$, άρα $E\left(\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\beta}{2}\right)$ και

$$(\Gamma E)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-2\alpha\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{3\alpha}{2}\right)^2+\frac{\beta^2}{4}}=\sqrt{\frac{9\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}}.$$ Άρα $(B\Delta)=(\Gamma E)$.

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ έχουν την πλευρά ΑΔ κοινή και τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ίσες, οπότε είναι ίσα και έχουν και τις γωνίες Β και Γ ίσες.

Διανύσματα

Είναι $\sigma\upsilon\nu B=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{B\Gamma}|}$ και $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\dfrac{\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}}{|\overrightarrow{\Gamma A}||\overrightarrow{\Gamma B}|}$.

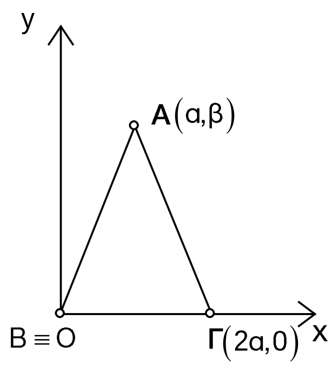
Για να είναι το τρίγωνο ισοσκελές πρέπει να αποδείξουμε ότι $B=\hat{\Gamma}$, οπότε αρκεί:

$$\sigma\upsilon\nu B=\sigma\upsilon\nu\Gamma\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}}{\cancel{|\overrightarrow{BA}|}\cancel{|\overrightarrow{B\Gamma}|}}=\frac{\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}}{\cancel{|\overrightarrow{\Gamma A}|}\cancel{|\overrightarrow{\Gamma B}|}}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{B\Gamma}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Gamma A}\right)=0\Leftrightarrow-\overrightarrow{B\Gamma}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=0\ (1)$$

Επειδή το ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, είναι: $\overrightarrow{A\Delta}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=2\overrightarrow{A\Delta}$, οπότε η σχέση (1) γίνεται: $\overrightarrow{B\Gamma}\cdot2\overrightarrow{A\Delta}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}\perp\overrightarrow{A\Delta}$ που ισχύει.

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.
Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (α,β) και η κορυφή $\Gamma(\gamma,0)$.
Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε:

$$(AB)=(A\Gamma)\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+\beta^2\Leftrightarrow$$

$\gamma^2-2\alpha\gamma=0\Leftrightarrow\gamma(\gamma-2\alpha)=0\Leftrightarrow\gamma=0$ που είναι αδύνατο ή $\gamma=2\alpha$. Τότε $\Gamma(2\alpha,0)$.

Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\dfrac{\beta}{\alpha}$, όμως $\lambda_{AB}=\varepsilon\varphi B$, άρα $\varepsilon\varphi B=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

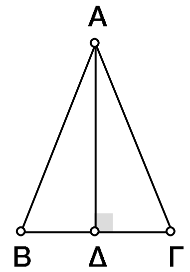
Η ευθεία ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{\beta}{\alpha-2\alpha}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, όμως $\lambda_{A\Gamma}=\varepsilon\varphi A\Gamma x$, άρα $\varepsilon\varphi A\Gamma x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Όμως $A\Gamma x = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - B$, άρα $\varepsilon\varphi A\Gamma x = \varepsilon\varphi\left(180^\circ - B\right) = -\varepsilon\varphi B = -\frac{\beta}{\alpha}$ που ισχύει.

3. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και διάμεσός του.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ έχουν:

ΑΔ κοινή πλευρά και

$AB = A\Gamma$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta = \Delta\Gamma$.

Διανύσματα

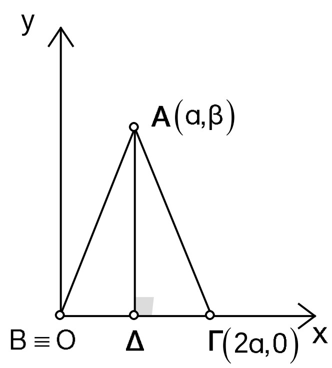
Είναι $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|$ και $\overrightarrow{A\Delta} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\left|\overrightarrow{B\Delta}\right| = \left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|$. Είναι

$\left|\overrightarrow{B\Delta}\right| = \left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{A\Delta}\right|^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{A\Delta}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{\overrightarrow{A\Delta}^2} - 2\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{A\Gamma}^2 - 2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta} + \cancel{\overrightarrow{A\Delta}^2} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AB} + \cancel{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} = \cancel{\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2} - 2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta} \Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta} - 2\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$ που ισχύει.

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.
Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (α,β) και η κορυφή $\Gamma(\gamma,0)$.
Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε:

$(AB) = (A\Gamma) \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2} \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + \beta^2 \Leftrightarrow$

$\gamma^2 - 2\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma(\gamma - 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$ που είναι αδύνατο ή

$\gamma = 2\alpha$. Τότε $\Gamma(2\alpha,0)$.Επειδή $A\Delta \perp x'x$, το Δ έχει συντεταγμένες $(\alpha,0)$.

Επειδή $x_\Delta = \frac{x_B + x_\Gamma}{2}$ και $y_\Delta = \frac{y_B + y_\Gamma}{2}$, το Δ είναι μέσο του ΒΓ.

4. Αν σε τρίγωνο μια διάμεσος του είναι και ύψος του, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

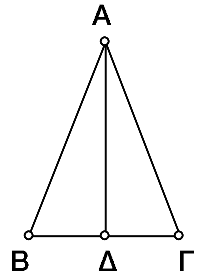
Λύση

Ευκλείδεια

Εστω ΑΔ διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ έχουν:

$A\Delta$ κοινή πλευρά
$AB = A\Gamma$ και
$B\Delta = \Delta\Gamma$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta_1 = \Delta_2$. Όμως $\Delta_1 + \Delta_2 = 180^\circ$, άρα $\Delta_1 = \Delta_2 = 90^\circ$.



Διανύσματα

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Gamma}|$.

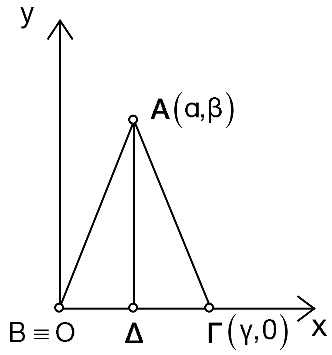
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Gamma}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Delta A}\right)^2 = \left(\overrightarrow{\Delta\Gamma} - \overrightarrow{\Delta A}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{\Delta B}^2 - 2\overrightarrow{\Delta B}\cdot\overrightarrow{\Delta A} + \cancel{\overrightarrow{\Delta A}^2} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}^2 - 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A} + \cancel{\overrightarrow{\Delta A}^2}$ (1)

Όμως $\overrightarrow{\Delta B} \perp \overrightarrow{\Delta A} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta B}\cdot\overrightarrow{\Delta A} = 0$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} \perp \overrightarrow{\Delta A} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A} = 0$, οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$|\overrightarrow{\Delta B}|^2 = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}|^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{\Delta B}| = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}|$ που ισχύει.

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.
Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (α,β) και η κορυφή $\Gamma(\gamma,0)$.
Εστω τώρα ότι το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος. Επειδή $A\Delta \perp x'x$, είναι $x_\Delta = x_A = \alpha$, οπότε $\Delta(\alpha,0)$.

Επειδή το Δ είναι το μέσο του ΒΓ είναι $x_\Delta = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow x_\Gamma = 2\alpha$, άρα $\Gamma(2\alpha,0)$.

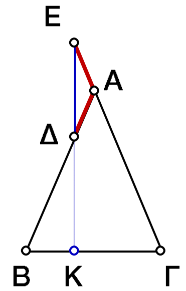
Είναι $(AB) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ και $(A\Gamma) = \sqrt{(\alpha - 2\alpha)^2 + \beta^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Επειδή $(AB) = (A\Gamma)$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

5. Εστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΒ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$.Στην προέκταση της ΓΑ προς το Α θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AE = A\Delta$.Να αποδείξετε ότι $\Delta E \perp B\Gamma$.

Λύση

Ευκλείδεια



Επειδή $AE = A\Delta$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, άρα $E = A\Delta E$.
Η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΕ, άρα

$A = E + A\Delta E = 2A\Delta E \Leftrightarrow A\Delta E = \frac{A}{2} = \frac{180^\circ - B - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{180^\circ - 2B}{2} = 90^\circ - B \Leftrightarrow$

$A\Delta E + B = 90^\circ$.

Όμως $A\Delta E = B\Delta K$, ως κατακορυφήν, άρα $B\Delta K + B = 90^\circ$,
οπότε στο τρίγωνο ΔΒΚ είναι και $K = 90^\circ$.

Διανύσματα

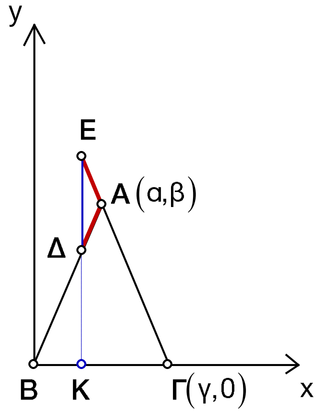
$$\overrightarrow{\Delta E}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}\right)\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{\Delta E}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu180^\circ-\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\sigma\upsilon\nu\Delta AE-\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu A+\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\sigma\upsilon\nu0^\circ$$

Όμως $\left|\overrightarrow{AE}\right|=\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=\alpha$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\beta$, άρα

$$\overrightarrow{\Delta E}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=-\cancel{\alpha\beta}-\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-A\right)-\alpha\beta\sigma\upsilon\nu A+\cancel{\alpha\beta}=\alpha\beta\sigma\upsilon\nu A-\alpha\beta\sigma\upsilon\nu A=0\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\Delta E}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (α,β) και η κορυφή $\Gamma(\gamma,0)$.

Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε:

$(AB)=(A\Gamma)\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}\Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+\beta^2\Leftrightarrow$

$\gamma^2-2\alpha\gamma=0\Leftrightarrow\gamma(\gamma-2\alpha)=0\Leftrightarrow\gamma=0$ που είναι αδύνατο ή $\gamma=2\alpha$. Τότε $\Gamma(2\alpha,0)$.

Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\dfrac{\beta}{\alpha}$ και εξίσωση $y=\dfrac{\beta}{\alpha}x$.

Εστω ότι το σημείο Δ έχει συντεταγμένες (x_1,y_1), τότε: $y_1=\dfrac{\beta}{\alpha}x_1$ και $\Delta\left(x_1,\dfrac{\beta}{\alpha}x_1\right)$.

Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση: $y-0=\dfrac{\beta-0}{\alpha-2\alpha}(x-2\alpha)\Leftrightarrow y=-\dfrac{\beta}{\alpha}x+2\beta$.

Εστω ότι το Ε έχει συντεταγμένες (x_2,y_2), τότε: $y_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}x_2+2\beta$.

Επειδή $x_E<x_A$ και $x_\Delta<x_A$, είναι $x_1,x_2\in(0,\alpha)$.

$$(A\Delta)=(AE)\Leftrightarrow\sqrt{(x_1-\alpha)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}x_1-\beta\right)^2}=\sqrt{(x_2-\alpha)^2+\left(-\frac{\beta}{\alpha}x_2+2\beta-\beta\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$(x_1-\alpha)^2+\frac{\beta^2}{\alpha^2}(x_1-\alpha)^2=(x_2-\alpha)^2+\left(-\frac{\beta}{\alpha}x_2+\beta\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2(x_1-\alpha)^2+\beta^2(x_1-\alpha)^2=\alpha^2(x_2-\alpha)^2+\beta^2(x_2-\alpha)^2\Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2+\beta^2)(x_1-\alpha)^2=(\alpha^2+\beta^2)(x_2-\alpha)^2\Leftrightarrow$$

$$(x_1-\alpha)^2=(x_2-\alpha)^2\Leftrightarrow$$

$x_1-\alpha=x_2-\alpha\Leftrightarrow x_1=x_2$ ή

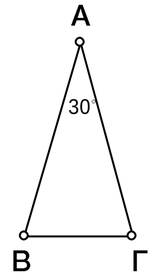
$x_1-\alpha=-x_2+\alpha\Leftrightarrow x_1+x_2=2\alpha$ που είναι αδύνατο αφού $x_1,x_2\in(0,\alpha)$

Επειδή $x_1=x_2$, η ευθεία ΔΕ έχει εξίσωση $x=x_1$ και είναι κάθετη στον άξονα x΄x, άρα και στη ΒΓ.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $A = 30^\circ$. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = A\Gamma\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Λύση

Ευκλείδεια



Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB\cdot A\Gamma \text{συν}30^\circ = A\Gamma^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma\cdot A\Gamma\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma^2 = 2A\Gamma^2 - A\Gamma^2\sqrt{3} = A\Gamma^2\left(2-\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow B\Gamma = A\Gamma\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

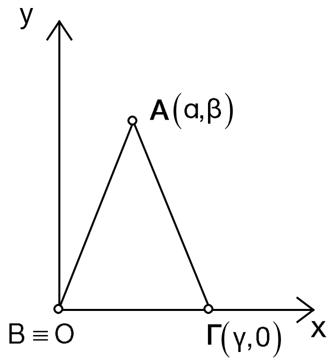
Διανύσματα

Είναι $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2 = \left|\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{A\Gamma}^2 - 2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 \Leftrightarrow$

$$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2 = \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\text{συν}30^\circ + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2 - \cancel{2}\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2\left(2-\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (α,β) και η κορυφή $\Gamma(\gamma,0)$.

Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε:

$$(AB) = (A\Gamma) \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2} \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$\gamma^2 - 2\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma(\gamma-2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$ που είναι αδύνατο ή $\gamma = 2\alpha$. Τότε $\Gamma(2\alpha,0)$.

Είναι $\overrightarrow{AB} = (-\alpha,-\beta)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (2\alpha-\alpha, 0-\beta) = (\alpha,-\beta)$.

$$\text{συν}A = \text{συν}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|} \Leftrightarrow \text{συν}30^\circ = \frac{(-\alpha)\alpha + (-\beta)(-\beta)}{\sqrt{(-\alpha)^2+(-\beta)^2}\sqrt{\alpha^2+(-\beta)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\alpha^2+\beta^2}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}\alpha^2 + \sqrt{3}\beta^2 = -2\alpha^2 + 2\beta^2 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)\alpha^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\beta^2 = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}\beta^2 = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}\beta^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)^2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha = \left(2-\sqrt{3}\right)\beta$$

Είναι $(A\Gamma) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2\beta^2+\beta^2} = \sqrt{\left(4-4\sqrt{3}+3+1\right)\beta^2} = \sqrt{\left(8-4\sqrt{3}\right)\beta^2} \Leftrightarrow$

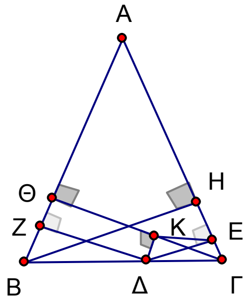
$(\text{ΑΓ}) = \sqrt{4\left(2-\sqrt{3}\right)\beta^2} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\beta$ και $(\text{ΒΓ}) = 2\alpha = 2\left(2-\sqrt{3}\right)\beta$

$(\text{ΑΓ})\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\beta\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2\beta\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2\beta\left(2-\sqrt{3}\right) = (\text{ΒΓ})$

7. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το άθροισμα των αποστάσεων οποιουδήποτε σημείου της βάσης του από τις ίσες πλευρές του, είναι σταθερό.

Λύση

Ευκλείδεια

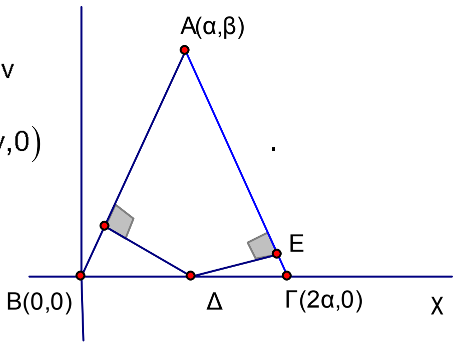


Εστω ΒΗ, ΓΘ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ και $\text{ΔΚ} \perp \text{ΓΘ}$.
Το τετράπλευρο ΔΚΘΖ είναι ορθογώνιο, οπότε $\text{ΔΖ} = \text{ΚΘ}$.

Είναι $\text{ΚΔΓ} = \text{Β} = \text{Γ}$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΚΔ, ΑΒ που τέμνονται από τη ΒΓ.

Επειδή $\text{ΔΚΓ} = \text{ΔΕΓ} = 90^\circ$, η πλευρά ΔΓ του τετραπλεύρου ΔΚΕΓ φαίνεται από τις κορυφές Κ,Ε υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, άρα $\text{ΔΚΕ} + \text{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{ΔΚΕ} + \text{ΚΔΕ} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{ΚΕ} \parallel \text{ΔΓ}$,
οπότε το ΔΚΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα $\text{ΔΕ} = \text{ΚΓ}$ (διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου)
$\text{ΔΖ} + \text{ΔΕ} = \text{ΚΘ} + \text{ΚΓ} = \text{ΓΘ} = \text{σταθερό}$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.
Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (α,β) και η κορυφή $\Gamma(\gamma,0)$

Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε:

$(\text{ΑΒ}) = (\text{ΑΓ}) \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2} \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + \beta^2 \Leftrightarrow$

$\gamma^2 - 2\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma(\gamma-2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$ που είναι αδύνατο ή

$\gamma = 2\alpha$. Τότε $\Gamma(2\alpha,0)$.

Η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση: $y-\beta = \dfrac{\beta-0}{\alpha-0}(x-\alpha) \Leftrightarrow y = \dfrac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow \beta x - \alpha y = 0$

Εστω $\Delta(x,0)$, $x>0$ σημείο της ΒΓ. Είναι $(\text{ΔΖ}) = d(\Delta,\text{ΑΒ}) = \dfrac{|\beta x - \alpha\cdot 0|}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} = \dfrac{\beta x}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}$

Η πλευρά ΑΓ έχει εξίσωση: $y-\beta = \dfrac{\beta-0}{\alpha-2\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow \beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$

Είναι $(\text{ΔΕ}) = d(\Delta,\text{ΑΓ}) = \dfrac{|\beta x + \alpha\cdot 0 - 2\alpha\beta|}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} = \dfrac{|\beta(x-2\alpha)|}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} = \dfrac{\beta(2\alpha-x)}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}$

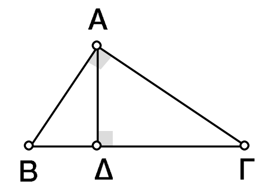
$(\text{ΔΕ}) + (\text{ΔΖ}) = \dfrac{\beta x}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} + \dfrac{\beta(2\alpha-x)}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} = \dfrac{\beta x + 2\alpha\beta - \beta x}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} = \dfrac{2\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} = \text{σταθερό}$

Ορθογώνιο τρίγωνο

8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας και αντιστρόφως.

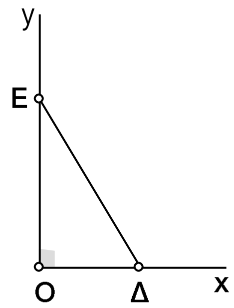
Λύση

Ευκλείδεια



Είναι $AB^2=B\Gamma\cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2=B\Gamma\cdot\Delta\Gamma$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $AB^2+A\Gamma^2 B\Gamma\cdot B\Delta+B\Gamma\cdot\Delta\Gamma=B\Gamma(B\Delta+\Delta\Gamma)=B\Gamma\cdot B\Gamma=B\Gamma^2$

Αντιστρόφως



Εστω ότι $AB^2+A\Gamma^2=B\Gamma^2$, θα αποδείξουμε ότι $A=90^\circ$.

Εστω ορθή γωνία xOy. Πάνω στην ΟΧ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $O\Delta=AB$ και πάνω στην Ο y σημείο Ε, τέτοιο, ώστε $OE=A\Gamma$.

Είναι $O\Delta^2+OE^2=\Delta E^2 \Leftrightarrow AB^2+A\Gamma^2=\Delta E^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2=\Delta E^2 \Leftrightarrow B\Gamma=\Delta E$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΟΔΕ έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε θα είναι ίσα, άρα θα έχουν και τις γωνίες Α και xOy ίσες. Δηλαδή $A=xOy=90^\circ$.

Διανύσματα

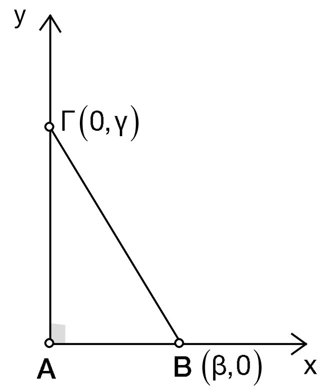
$$|\vec{B\Gamma}|^2=(\vec{A\Gamma}-\vec{AB})^2=\vec{A\Gamma}^2-2\cancelto{0}{\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}}+\vec{AB}^2=|\vec{A\Gamma}|^2+|\vec{AB}|^2$$

Αντιστρόφως

$$|\vec{B\Gamma}|^2=|\vec{A\Gamma}|^2+|\vec{AB}|^2 \Leftrightarrow (\vec{A\Gamma}-\vec{AB})^2=\vec{A\Gamma}^2+\vec{AB}^2 \Leftrightarrow \cancel{\vec{A\Gamma}^2}-2\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}+\cancel{\vec{AB}^2}==\cancel{\vec{A\Gamma}^2}+\cancel{\vec{AB}^2} \Leftrightarrow$$

$2\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}=0 \Leftrightarrow \vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}=0 \Leftrightarrow \vec{A\Gamma}\perp\vec{AB}$, άρα $A=90^\circ$.

Συντεταγμένες



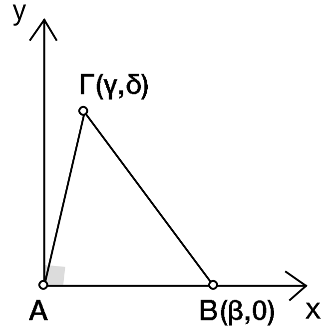
Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α, η πλευρά ΑΒ βρίσκεται στον άξονα x΄x και η πλευρά ΑΓ στον άξονα y΄y.

Αν τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(\beta,0)$ και $(0,\gamma)$ αντίστοιχα, τότε:

$(AB)=\beta$, $(A\Gamma)=\gamma$ και

$$(B\Gamma)^2=\left(\sqrt{(\beta-0)^2+(0-\gamma)^2}\right)^2=\beta^2+\gamma^2=(AB)^2+(A\Gamma)^2$$

Αντιστρόφως



Εστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει η σχέση $AB^2+A\Gamma^2=B\Gamma^2$, δεν είναι ορθογώνιο στο Α. Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο η κορυφή Α ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων και η πλευρά ΑΒ βρίσκεται στον άξονα x΄x. Έστω $B(\beta,0)$ και $\Gamma(\gamma,\delta)$ με $\gamma,\delta\neq 0$. Είναι

$$AB^2+A\Gamma^2=B\Gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2+\left(\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\right)^2=\left(\sqrt{(\gamma-\delta)^2+\beta^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

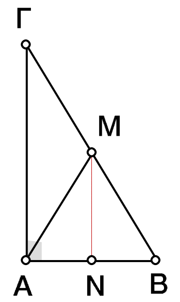
$$\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\gamma^2-2\gamma\delta+\delta^2+\beta^2 \Leftrightarrow 2\gamma\delta=0 \Leftrightarrow$$

$\gamma=0$ ή $\delta=0$ που είναι αδύνατο. Άρα $A=90^\circ$.

9. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ορθογώνιο ΑΒΓ με $A=90^\circ$ και έστω ΑΜ διάμεσός του.
Αν Ν το μέσο της πλευράς ΑΒ, τότε επειδή το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, θα είναι $MN \parallel A\Gamma$.
Όμως $A\Gamma \perp AB$, άρα και $MN \perp AB$.
Στο τρίγωνο ΑΜΒ το ΜΝ είναι διάμεσος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δηλαδή $AM=MB=\frac{B\Gamma}{2}$.

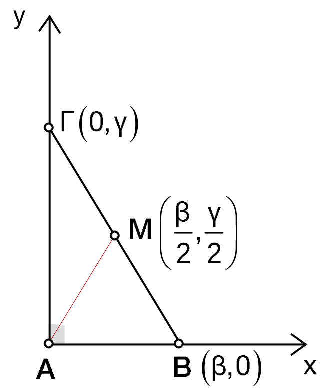
Διανύσματα

Είναι $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)$, άρα

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Gamma}^2\right)\overset{\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2\right)=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α, η πλευρά ΑΒ βρίσκεται στον άξονα x΄x και η πλευρά ΑΓ στον άξονα y΄y.
Αν τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(\beta,0)$ και $(0,\gamma)$ αντίστοιχα, τότε το μέσο Μ του ΒΓ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}\right)$.

Είναι $(B\Gamma)=\sqrt{(0-\beta)^2+(\gamma-0)^2}=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$ και

$$(AM)=\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}}=\sqrt{\frac{\beta^2+\gamma^2}{4}}=\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{2}=\frac{(B\Gamma)}{2}$$

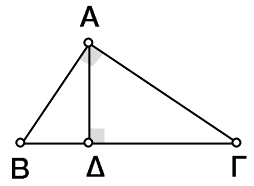
10. Εστω ΑΔ το ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $\left(A=90^\circ\right)$. Να αποδείξετε ότι:

$AB^2=B\Gamma\cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2=B\Gamma\cdot\Delta\Gamma$.

Λύση

Ευκλείδεια

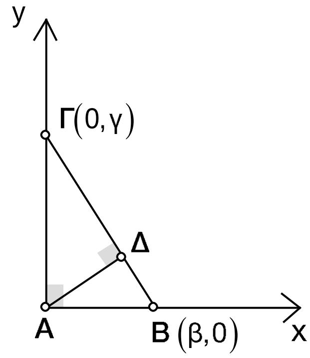
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι όμοια γιατί έχουν $\mathrm{A}=\Delta=90^\circ$ και $\mathrm{B}\mathrm{A}\Delta=\hat{\Gamma}=90^\circ-\mathrm{B}$. Άρα $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}\Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{B\Gamma}$.



Διανύσματα

$$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}=\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\cdot\text{προβ}_{\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}}\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\cancelto{0}{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2=\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α, η πλευρά ΑΒ βρίσκεται στον άξονα x΄x και η πλευρά ΑΓ στον άξονα y΄y.
Αν τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(\beta,0)$ και $(0,\gamma)$ αντίστοιχα, τότε η ευθεία ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\gamma-0}{0-\beta}=-\frac{\gamma}{\beta}$,

οπότε $\mathrm{A\Delta}\perp\mathrm{B\Gamma}\Leftrightarrow\lambda_{\mathrm{A\Delta}}\cdot\lambda_{\mathrm{B\Gamma}}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\mathrm{A\Delta}}=\frac{\beta}{\gamma}$

Η ευθεία ΑΔ έχει εξίσωση $y=\frac{\beta}{\gamma}x$ και η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση:

$$y-\gamma=-\frac{\gamma}{\beta}(x-0)\Leftrightarrow y=-\frac{\gamma}{\beta}x+\gamma$$

Για το σημείο Δ θα λύσουμε το σύστημα των ΑΔ,ΒΓ. Είναι:

$$\begin{cases} y=-\frac{\gamma}{\beta}x+\gamma \\ y=\frac{\beta}{\gamma}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{\beta}{\gamma}x=-\frac{\gamma}{\beta}x+\gamma \\ y=\frac{\beta}{\gamma}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \beta^2x=-\gamma^2x+\beta\gamma^2 \\ y=\frac{\beta}{\gamma}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \beta^2x+\gamma^2x=\beta\gamma^2 \\ y=\frac{\beta}{\gamma}x \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\beta^2+\gamma^2\right)x=\beta\gamma^2 \\ y=\frac{\beta}{\gamma}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{\beta\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2} \\ y=\frac{\beta^2\gamma}{\beta^2+\gamma^2} \end{cases}$$

Άρα $\Delta\left(\frac{\beta\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2},\frac{\beta^2\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\right)$.

Είναι $(\mathrm{B\Gamma})=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$, $(\mathrm{AB})=\beta$ και

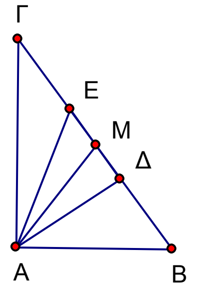
$$(\mathrm{B\Delta})=\sqrt{\left(\frac{\beta\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}-\beta\right)^2+\left(\frac{\beta^2\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{\beta^6}{\left(\beta^2+\gamma^2\right)^2}+\frac{\beta^4\gamma^2}{\left(\beta^2+\gamma^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{\beta^4\cancel{\left(\beta^2+\gamma^2\right)}}{\left(\beta^2+\gamma^2\right)^{\cancel{2}}}}=\frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}.$$

$$(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{B\Delta})=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\cdot\frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}=\beta^2=(\mathrm{AB})^2$$

11. Εστω Δ,Ε σημεία της υποτείνουσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $\left(A=90^\circ\right)$ τέτοια, ώστε $B\Delta=\Delta E=E\Gamma$. Να αποδείξετε ότι: $A\Delta^2+AE^2=\frac{5}{9}B\Gamma^2$.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω Μ το μέσο του ΔΕ.
Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΔΕ, έχουμε:

$A\Delta^2+AE^2=2AM^2+\frac{\Delta E^2}{2}$ (1).

Επειδή $ME=M\Delta$ και $E\Gamma=\Delta B$, είναι και $M\Gamma=MB$, οπότε το Μ είναι μέσο της υποτείνουσας ΒΓ.

Είναι $AM=\frac{B\Gamma}{2}$ και $\Delta E=\frac{B\Gamma}{3}$, οπότε η (1) γίνεται:

$$A\Delta^2+AE^2=\cancel{2}\frac{B\Gamma^2}{\cancel{4}^{2}}+\frac{\frac{B\Gamma^2}{9}}{2}=\frac{9B\Gamma^2}{18}+\frac{B\Gamma^2}{18}=\frac{10B\Gamma^2}{18}=\frac{5B\Gamma^2}{9}$$

Διανύσματα

$$\vec{A\Delta}^2+\vec{AE}^2=\left(\vec{B\Delta}-\vec{BA}\right)^2+\left(\vec{\Gamma E}-\vec{\Gamma A}\right)^2=\vec{B\Delta}^2-2\vec{B\Delta}\cdot\vec{BA}+\vec{BA}^2+\vec{\Gamma E}^2-2\vec{\Gamma E}\cdot\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma A}^2 \quad (1)$$

Όμως $\vec{B\Delta}=\vec{\Delta E}=\vec{E\Gamma}=\frac{1}{3}\vec{B\Gamma}$ και $\vec{BA}^2+\vec{\Gamma A}^2=\vec{B\Gamma}^2$, οπότε η (1) γίνεται:

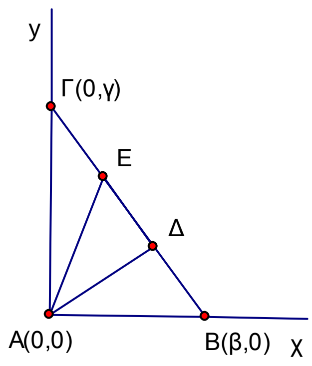
$$\vec{A\Delta}^2+\vec{AE}^2=\left(\frac{1}{3}\vec{B\Gamma}\right)^2-2\left|\vec{B\Delta}\right|\cdot\left|\vec{BA}\right|\sigma\upsilon\nu B+\vec{B\Gamma}^2+\left(\frac{1}{3}\vec{B\Gamma}\right)^2-2\left|\vec{\Gamma E}\right|\cdot\left|\vec{\Gamma A}\right|\sigma\upsilon\nu\Gamma\Leftrightarrow$$

$$\vec{A\Delta}^2+\vec{AE}^2=\frac{1}{9}\vec{B\Gamma}^2-2\frac{1}{3}\left|\vec{B\Gamma}\right|\cdot\left|\vec{BA}\right|\sigma\upsilon\nu B+\vec{B\Gamma}^2+\frac{1}{9}\vec{B\Gamma}^2-2\frac{1}{3}\left|\vec{\Gamma B}\right|\cdot\left|\vec{\Gamma A}\right|\sigma\upsilon\nu\Gamma\Leftrightarrow$$

$$\vec{A\Delta}^2+\vec{AE}^2=\frac{11}{9}\vec{B\Gamma}^2-\frac{2}{3}\vec{B\Gamma}\cdot\vec{BA}-\frac{2}{3}\vec{\Gamma B}\cdot\vec{\Gamma A}=\frac{11}{9}\vec{B\Gamma}^2-\frac{2}{3}\vec{B\Gamma}\cdot\vec{BA}+\frac{2}{3}\vec{B\Gamma}\cdot\vec{\Gamma A}\Leftrightarrow$$

$$\vec{A\Delta}^2+\vec{AE}^2=\frac{11}{9}\vec{B\Gamma}^2+\frac{2}{3}\vec{B\Gamma}\cdot\left(\vec{\Gamma A}-\vec{BA}\right)=\frac{11}{9}\vec{B\Gamma}^2+\frac{2}{3}\vec{B\Gamma}\cdot\left(\vec{\Gamma A}+\vec{AB}\right)\frac{11}{9}\vec{B\Gamma}^2-\frac{6}{9}\vec{B\Gamma}^2=\frac{5}{9}\vec{B\Gamma}^2$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α και οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ βρίσκονται επί των ημιαξόνων Οx, Οy αντίστοιχα.
Εστω ότι τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(\beta,0)$ και $(0,\gamma)$ αντίστοιχα. Εστω επίσης $\Delta(x_1,y_1)$, $E(x_2,y_2)$.
Επειδή το Δ είναι μέσο του ΕΒ, ισχύει ότι:

$$x_1=\frac{x_2+\beta}{2} \; (1) \text{ και } y_1=\frac{y_2}{2}\Leftrightarrow y_2=2y_1 \; (2)$$

Επειδή το Ε είναι μέσο του ΔΓ, ισχύει ότι:

$$x_2=\frac{x_1}{2}\Leftrightarrow x_1=2x_2\,(3)\ \text{και}\ y_2=\frac{y_1+\gamma}{2}\ (4)$$

Από τις (1),(3), έχουμε: $2x_2=\frac{x_2+\beta}{2}\Leftrightarrow 4x_2=x_2+\beta\Leftrightarrow x_2=\frac{\beta}{3}$ και $x_1=\frac{2\beta}{3}$

Από τις (2),(4), έχουμε: $2y_1=\frac{y_1+\gamma}{2}\Leftrightarrow 4y_1=y_1+\gamma\Leftrightarrow y_1=\frac{\gamma}{3}$ και $y_2=\frac{2\gamma}{3}$

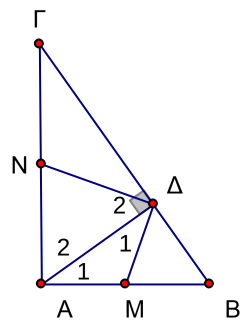
Άρα $\Delta\left(\frac{2\beta}{3},\frac{\gamma}{3}\right)$ και $E\left(\frac{\beta}{3},\frac{2\gamma}{3}\right)$.

Είναι $A\Delta^2+AE^2=\frac{4\beta^2}{9}+\frac{\gamma^2}{9}+\frac{\beta^2}{9}+\frac{4\gamma^2}{9}=\frac{5\left(\beta^2+\gamma^2\right)}{9}=\frac{5}{9}B\Gamma^2$

12. Εστω ΑΔ το ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $\left(A=90^\circ\right)$. Αν Μ,Ν είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $M\Delta N=90^\circ$.

Λύση

Ευκλείδεια



Η ΔΝ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, οπότε
$\Delta N=N\Gamma=NA\Rightarrow \overset{\triangle}{\Delta NA}$ ισοσκελές, οπότε $\Delta_2=A_2$.
Η ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ, οπότε
$\Delta M=MB=MA\Rightarrow \overset{\triangle}{\Delta MA}$ ισοσκελές, οπότε $\Delta_1=A_1$.
Είναι $M\Delta N=\Delta_1+\Delta_2=A_1+A_2=90^\circ$.

Διανύσματα

$$\vec{\Delta N}\cdot\vec{\Delta M}=\frac{1}{2}\left(\vec{\Delta A}+\vec{\Delta\Gamma}\right)\frac{1}{2}\left(\vec{\Delta A}+\vec{\Delta B}\right)=\frac{1}{4}\left(\vec{\Delta A}^2+\vec{\Delta A}\cdot\vec{\Delta B}+\vec{\Delta A}\cdot\vec{\Delta\Gamma}+\vec{\Delta\Gamma}\cdot\vec{\Delta B}\right)\Leftrightarrow$$

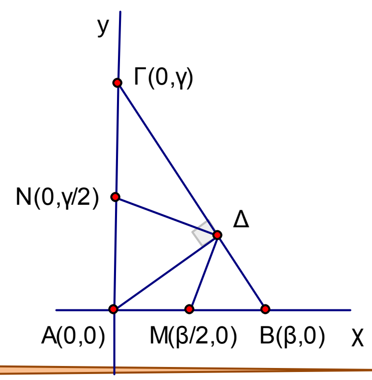
$$\vec{\Delta N}\cdot\vec{\Delta M}=\frac{1}{2}\left(\vec{\Delta A}+\vec{\Delta\Gamma}\right)\frac{1}{2}\left(\vec{\Delta A}+\vec{\Delta B}\right)=\frac{1}{4}\left(\vec{\Delta A}^2+\cancel{\vec{\Delta A}\cdot\vec{\Delta B}}^{0}+\cancel{\vec{\Delta A}\cdot\vec{\Delta\Gamma}}^{0}+\vec{\Delta\Gamma}\cdot\vec{\Delta B}\right)\Leftrightarrow$$

$$\vec{\Delta N}\cdot\vec{\Delta M}=\frac{1}{4}\left(\vec{\Delta A}^2+\left(\vec{A\Gamma}-\vec{A\Delta}\right)\cdot\left(\vec{AB}-\vec{A\Delta}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\vec{\Delta A}^2+\cancel{\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}}^{0}-\vec{A\Gamma}\cdot\vec{A\Delta}-\vec{AB}\cdot\vec{A\Delta}+\vec{A\Delta}^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\vec{\Delta N}\cdot\vec{\Delta M}=\frac{1}{4}\left(2\vec{A\Delta}^2-\vec{A\Delta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{A\Delta}}\vec{A\Gamma}-\vec{A\Delta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{A\Delta}}\vec{AB}\right)\Leftrightarrow$$

$$\vec{\Delta N}\cdot\vec{\Delta M}=\frac{1}{4}\left(2\vec{A\Delta}^2-\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Delta}-\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Delta}\right)=\frac{1}{4}\left(2\vec{A\Delta}^2-2\vec{A\Delta}^2\right)=0\Leftrightarrow\vec{\Delta N}\perp\vec{\Delta M}$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α και οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ βρίσκονται επί των ημιαξόνων Οx, Oy αντίστοιχα.
Εστω ότι τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(\beta,0)$ και $(0,\gamma)$ αντίστοιχα, τότε $M\left(\frac{\beta}{2},0\right)$ και $N\left(0,\frac{\gamma}{2}\right)$.

Είναι $\lambda_{ΒΓ}=-\frac{\gamma}{\beta}$ και η εξίσωση της ΒΓ είναι:

$$y-\gamma=-\frac{\gamma}{\beta}x \Leftrightarrow y=-\frac{\gamma}{\beta}x+\gamma$$

Είναι $ΑΔ\perp ΒΓ \Leftrightarrow \lambda_{ΑΔ}\lambda_{ΒΓ}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{ΑΔ}=\frac{\beta}{\gamma}$ και η εξίσωση της ΑΔ είναι: $y=\frac{\beta}{\gamma}x$.

Για τις συντεταγμένες του Δ, ισχύει:

$$\begin{cases} y=-\frac{\gamma}{\beta}x+\gamma \\ y=\frac{\beta}{\gamma}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\beta}{\gamma}x=-\frac{\gamma}{\beta}x+\gamma \\ y=\frac{\beta}{\gamma}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2=-\gamma^2x+\beta\gamma^2 \\ y=\frac{\beta}{\gamma}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\beta\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2} \\ y=\frac{\beta^2\gamma}{\beta^2+\gamma^2} \end{cases}, \text{ άρα } Δ\left(\frac{\beta\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2},\frac{\beta^2\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\right).$$

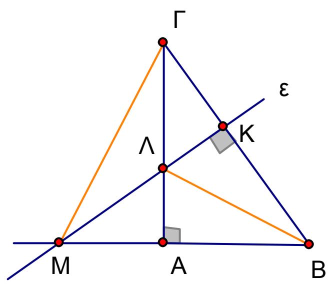
Είναι $\lambda_{ΔΜ}=\dfrac{\dfrac{\beta^2\gamma}{\beta^2+\gamma^2}}{\dfrac{\beta\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}-\dfrac{\beta}{2}}=\dfrac{2\beta\gamma}{\gamma^2-\beta^2}$ και $\lambda_{ΔΝ}=\dfrac{\dfrac{\beta^2\gamma}{\beta^2+\gamma^2}-\dfrac{\gamma}{2}}{\dfrac{\beta\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}}=\dfrac{\beta^2-\gamma^2}{2\beta\gamma}$,

$$\lambda_{ΔΜ}\lambda_{ΔΝ}=\frac{2\beta\gamma}{\gamma^2-\beta^2}\cdot\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\beta\gamma}=-1 \Leftrightarrow ΔΜ\perp ΔΝ \text{ και } ΜΔΝ=90^\circ.$$

13. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(Α=90^\circ\right)$ και ευθεία ε κάθετη στη ΒΓ σε τυχαίο σημείο Κ, που τέμνει την ΑΓ στο Λ και το φορέα της ΒΑ στο Μ. Να αποδείξετε ότι $ΒΛ\perp ΓΜ$.

Λύση

Ευκλείδεια



Στο τρίγωνο ΒΓΜ τα ΜΚ,ΓΑ είναι ύψη, άρα το Λ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου. Οπότε και ΒΛ ύψος, δηλαδή $ΒΛ\perp ΓΜ$

Διανύσματα

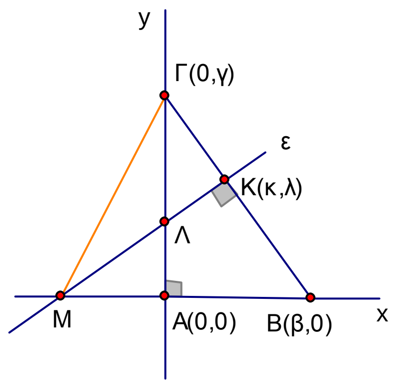
$$\vec{ΒΛ}\cdot\vec{ΓΜ}=\left(\vec{ΑΛ}-\vec{ΑΒ}\right)\left(\vec{ΑΜ}-\vec{ΑΓ}\right)\Leftrightarrow$$

$$\vec{ΒΛ}\cdot\vec{ΓΜ}=\cancelto{0}{\vec{ΑΛ}\cdot\vec{ΑΜ}}-\vec{ΑΛ}\cdot\vec{ΑΓ}-\vec{ΑΒ}\cdot\vec{ΑΜ}+\cancelto{0}{\vec{ΑΒ}\cdot\vec{ΑΓ}}\Leftrightarrow$$

$$\vec{ΒΛ}\cdot\vec{ΓΜ}=-\vec{ΑΛ}\cdot\vec{ΑΓ}-\vec{ΑΒ}\cdot\vec{ΑΜ}=-\vec{ΑΓ}\,προβ_{\vec{ΑΓ}}\vec{ΜΛ}-\vec{ΑΒ}\,προβ_{\vec{ΑΒ}}\vec{ΛΜ}\Leftrightarrow$$

$$\vec{ΒΛ}\cdot\vec{ΓΜ}=-\vec{ΑΓ}\cdot\vec{ΜΛ}-\vec{ΑΒ}\cdot\vec{ΛΜ}=\vec{ΑΓ}\cdot\vec{ΛΜ}-\vec{ΑΒ}\cdot\vec{ΛΜ}=\vec{ΛΜ}\left(\vec{ΑΓ}-\vec{ΑΒ}\right)=\vec{ΛΜ}\cdot\vec{ΒΓ}=0\Leftrightarrow\vec{ΒΛ}\perp\vec{ΓΜ}$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α και οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ βρίσκονται επί των ημιαξόνων Οx, Oy αντίστοιχα.
Εστω ότι τα σημεία Β , Γ ,Κ έχουν συντεταγμένες $(\beta,0),(0,\gamma)$ και (κ,λ) αντίστοιχα.

Είναι $\lambda_{B\Gamma} = -\frac{\gamma}{\beta}$ και η εξίσωση της ΒΓ είναι: $y-\gamma = -\frac{\gamma}{\beta}x \Leftrightarrow y = -\frac{\gamma}{\beta}x+\gamma$

Επειδή το Κ βρίσκεται στη ΒΓ, ισχύει ότι: $\lambda = -\frac{\gamma}{\beta}\kappa+\gamma$, άρα $K\left(\kappa, -\frac{\gamma}{\beta}\kappa+\gamma\right)$.

Είναι $KM \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{KM}\lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{KM} = \frac{\beta}{\gamma}$ και η εξίσωση της ΑΜ είναι:

$$y-\left(-\frac{\gamma}{\beta}\kappa+\gamma\right) = \frac{\beta}{\gamma}(x-\kappa) \Leftrightarrow \beta^2 x - \beta\gamma y = \kappa\beta^2+\kappa\gamma^2-\beta\gamma^2.$$

Για $x=0$ έχουμε $-\beta\gamma y = \kappa\beta^2+\kappa\gamma^2-\beta\gamma^2 \Leftrightarrow y = \frac{-\kappa\beta^2-\kappa\gamma^2+\beta\gamma^2}{\beta\gamma}$, άρα $\Lambda\left(0, \frac{-\kappa\beta^2-\kappa\gamma^2+\beta\gamma^2}{\beta\gamma}\right)$.

Για $y=0$ είναι $x = \frac{\kappa\beta^2+\kappa\gamma^2-\beta\gamma^2}{\beta^2}$ και $M\left(\frac{\kappa\beta^2+\kappa\gamma^2-\beta\gamma^2}{\beta^2}, 0\right)$

Η ευθεία ΒΛ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_{B\Lambda} = \frac{\frac{-\kappa\beta^2-\kappa\gamma^2+\beta\gamma^2}{\beta\gamma}-0}{0-\beta} = -\frac{-\kappa\beta^2-\kappa\gamma^2+\beta\gamma^2}{\beta^2\gamma}$

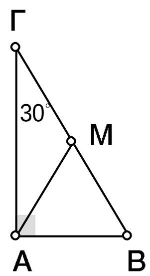
και η ευθεία ΓΜ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_{\Gamma M} = \frac{\gamma-0}{0-\frac{\kappa\beta^2+\kappa\gamma^2-\beta\gamma^2}{\beta^2\gamma}} = \frac{\beta^2\gamma}{-\kappa\beta^2-\kappa\gamma^2+\beta\gamma^2}$

Είναι $\lambda_{B\Lambda}\lambda_{\Gamma M} = -\frac{-\kappa\beta^2-\kappa\gamma^2+\beta\gamma^2}{\beta^2\gamma}\frac{\beta^2\gamma}{-\kappa\beta^2-\kappa\gamma^2+\beta\gamma^2} = -1 \Leftrightarrow B\Lambda \perp \Gamma M$

14. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με 30°, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ΑΜ η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.
Επειδή $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, είναι $B = 60^\circ$ και επειδή το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές, αφού $AM = MB = \frac{B\Gamma}{2}$, θα είναι ισόπλευρο, οπότε $AB = \frac{B\Gamma}{2}$

Διανύσματα

$$\vec{\Gamma B}\cdot\vec{\Gamma A} = |\vec{\Gamma B}||\vec{\Gamma A}|\sigma\upsilon\nu 30^\circ \Leftrightarrow -\left(\vec{AB}-\vec{A\Gamma}\right)\vec{A\Gamma} = |\vec{\Gamma B}||\vec{A\Gamma}|\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -2\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}+2\vec{A\Gamma}^2 = \sqrt{3}|\vec{\Gamma B}||\vec{A\Gamma}| \Leftrightarrow$$

$$2|\vec{A\Gamma}|^2 = \sqrt{3}|\vec{\Gamma B}||\vec{A\Gamma}| \Leftrightarrow \left(2|\vec{A\Gamma}|^2\right)^2 = \left(\sqrt{3}|\vec{\Gamma B}||\vec{A\Gamma}|\right)^2 \Leftrightarrow 4|\vec{A\Gamma}|^4 = 3|\vec{\Gamma B}|^2|\vec{A\Gamma}|^2 \Leftrightarrow$$

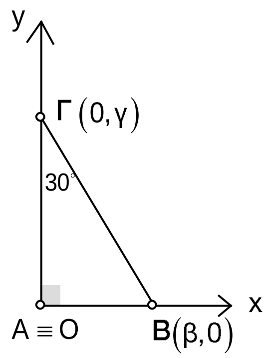
$$4|\vec{A\Gamma}|^4 - 3|\vec{\Gamma B}|^2|\vec{A\Gamma}|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$|\vec{A\Gamma}|^2\left(4|\vec{A\Gamma}|^2-3|\vec{\Gamma B}|^2\right) = 0 \Leftrightarrow |\vec{A\Gamma}| = 0$ που είναι αδύνατο ή

$$4|\vec{A\Gamma}|^2-3|\vec{\Gamma B}|^2 = 0 \Leftrightarrow 4\left(|\vec{B\Gamma}|^2-|\vec{AB}|^2\right)-3|\vec{B\Gamma}|^2 = 0 \Leftrightarrow 4|\vec{B\Gamma}|^2-4|\vec{AB}|^2-3|\vec{B\Gamma}|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2 = 4\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = 2\left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|}{2}$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α και οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ βρίσκονται επί των ημιαξόνων Οx, Oy αντίστοιχα. Έστω ότι τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(\beta,0)$ και $(0,\gamma)$ αντίστοιχα.

Επειδή $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, είναι $B = 60^\circ$, άρα $\Gamma Bx = 120^\circ$.

Όμως $\varepsilon\varphi \Gamma Bx = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 120^\circ = -\frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi 60^\circ = -\frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{3}\beta$.

Είναι $(B\Gamma) = \sqrt{\beta^2+\gamma^2} = \sqrt{\beta^2+\left(\beta\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\beta^2+3\beta^2} = \sqrt{4\beta^2} = 2\beta = 2(AB)$

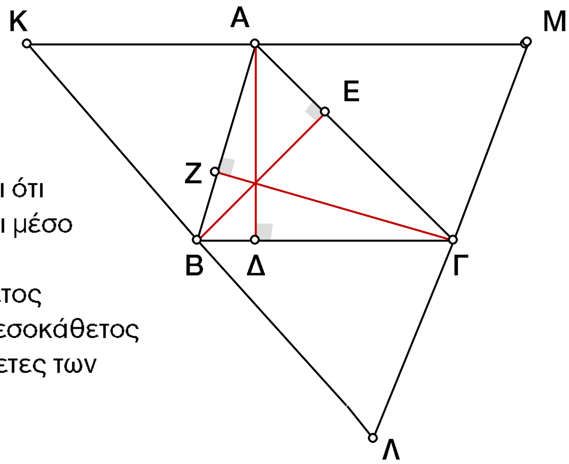
Τυχαίο τρίγωνο

Ορθόκεντρο τριγώνου

15. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο τα ύψη του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

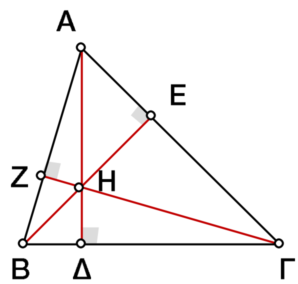
Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ τα ύψη τριγώνου ΑΒΓ.
Θεωρούμε ευθείες κάθετες στα ύψη που διέρχονται από τις κορυφές του τριγώνου και έστω Κ,Λ,Μ τα σημεία τομής τους. Τότε $KM \parallel B\Gamma, K\Lambda \parallel A\Gamma$ και $\Lambda M \parallel AB$.
Από τα παραλληλόγραμμα ΚΒΓΑ και ΑΒΓΜ, προκύπτει ότι $KA = B\Gamma$ και $AM = B\Gamma$, άρα $KA = AM$, οπότε το Α είναι μέσο του ΚΜ και η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΚΜ.
Όμοια το Β είναι μέσο του ΚΛ και η ΒΕ είναι μεσοκάθετος του ΚΛ. Όμοια το Γ είναι μέσο του ΛΜ και η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΛΜ. Στο τρίγωνο ΚΛΜ οι ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ είναι μεσοκάθετες των πλευρών του, οπότε διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Διανύσματα



Εστω ότι τα ύψη ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Η. Θα δείξουμε ότι και το ΓΖ είναι ύψος του τριγώνου.
Είναι $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HA}\cdot\left(\overrightarrow{H\Gamma}-\overrightarrow{HB}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{H\Gamma} - \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{H\Gamma} = \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}$ (1)

$\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HB} \cdot \left(\overrightarrow{H\Gamma} - \overrightarrow{HA}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{H\Gamma} - \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{H\Gamma} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA}$ (2)

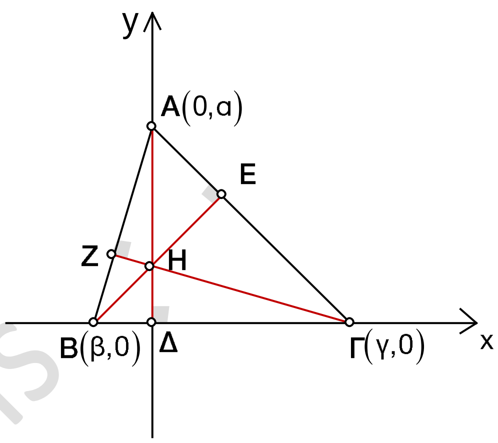
Από τις σχέσεις (1),(2), προκύπτει ότι:

$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{H\Gamma} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{H\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{H\Gamma} - \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{H\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{H\Gamma}\left(\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{H\Gamma} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{H\Gamma} \perp \overrightarrow{BA}$, άρα και $\overrightarrow{\Gamma Z} \perp \overrightarrow{BA}$.

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με το Δ, ο άξονας x΄x με τη πλευρά ΒΓ και ο άξονας y΄y με το ύψος ΑΔ.

Εστω $A(0,\alpha), B(\beta,0)$ και $\Gamma(\gamma,0)$.



Εστω ότι τα ύψη ΑΔ και ΓΖ τέμνονται στο Η. Θα αποδείξουμε ότι το Η ανήκει και στη ΒΕ.

Αρχικά θα βρούμε τις συντεταγμένες του Η. Είναι:

$\lambda_{AB} = \dfrac{0-\alpha}{\beta-0} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $\Gamma Z \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma Z} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma Z} = \dfrac{\beta}{\alpha}$

Η ευθεία ΓΖ έχει εξίσωση: $y - 0 = \dfrac{\beta}{\alpha}(x-\gamma) \Leftrightarrow y = \dfrac{\beta}{\alpha}x - \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$.

Για $x=0$ είναι $y = -\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$, άρα το Η έχει συντεταγμένες $\left(0, -\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$.

$\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{0-\alpha}{\gamma-0} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}$ και $BE \perp A\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{BE} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{BE} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$. Η ΒΕ έχει εξίσωση:

$y - 0 = \dfrac{\gamma}{\alpha}(x-\beta) \Leftrightarrow y = \dfrac{\gamma}{\alpha}x - \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$.

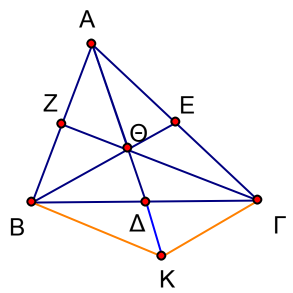
Επειδή $-\dfrac{\beta\gamma}{\alpha} = \dfrac{\gamma}{\alpha} \cdot 0 - \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$, οι συντεταγμένες του Η επαληθεύουν τη ΒΕ, άρα και η ΒΕ διέρχεται από το Η.

Βαρύκεντρο τριγώνου

16. Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο απέχει από κάθε κορυφή απόσταση ίση με τα $\dfrac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ότι οι διάμεσοι ΓΖ,ΒΕ τέμνονται στο Θ. Θα αποδείξουμε ότι και η διάμεσος ΑΔ διέρχεται από το Θ και

$\Theta A = \dfrac{2}{3}A\Delta,\ \Theta B = \dfrac{2}{3}BE,\ \Theta\Gamma = \dfrac{2}{3}\Gamma Z$.

Προεκτείνουμε τη ΘΑ προς το Θ κατά ίσο τμήμα ΘΚ. Στο τρίγωνο ΑΒΚ τα Θ,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών άρα $\Theta Z =\parallel \dfrac{BK}{2} \Rightarrow \Gamma Z \parallel BK$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΚΓ τα Θ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών του, άρα $\Theta E =\parallel \dfrac{K\Gamma}{2} \Rightarrow BE \parallel K\Gamma$ (2)

Από (1),(2) $\Rightarrow$ΒΚΓΘ παραλληλόγραμμο, οπότε $B\Delta=\Delta\Gamma$, δηλαδή η ΑΔ είναι διάμεσος.

Επειδή το ΒΚΓΘ είναι # ισχύει ότι $\Theta\Delta=\Delta K=\frac{\Theta A}{2}\Leftrightarrow \Theta A=2\Theta\Delta$ και $\Theta A=\frac{2}{3}A\Delta$.

Επειδή $\Theta E=|| \frac{K\Gamma}{2}=\frac{B\Theta}{2}\Rightarrow B\Theta=2\Theta E\Rightarrow \Theta B=\frac{2}{3}BE$.

Επειδή $\Theta Z=|| \frac{BK}{2}=\frac{\Theta\Gamma}{2}\Rightarrow \Theta\Gamma=2\Theta Z\Rightarrow \Theta\Gamma=\frac{2}{3}\Gamma Z$.

Διανύσματα

Εστω ότι οι διάμεσοι ΑΔ,ΒΕ τέμνονται στο Θ. Θα αποδείξουμε ότι

$\overrightarrow{A\Theta}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A\Delta},\ \overrightarrow{B\Theta}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{\Gamma\Theta}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma Z}$. Εστω ότι $\overrightarrow{A\Theta}=x\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{B\Theta}=y\overrightarrow{BE}$. Τότε

$$\overrightarrow{A\Theta}-\overrightarrow{B\Theta}=x\overrightarrow{A\Delta}-y\overrightarrow{BE}\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Theta}+\overrightarrow{\Theta B}=x\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)-y\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}\right)\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}=\frac{x}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{x}{2}\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{y}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{y}{2}\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)\Leftrightarrow \frac{x}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{x}{2}\overrightarrow{A\Gamma}+\frac{y}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{y}{2}\overrightarrow{A\Gamma}+\frac{y}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{2}+y-1\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}\ (1)$$

Αν $\frac{x}{2}+y-1\neq 0$, τότε από $(1)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=-\frac{\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}{\frac{x}{2}+y-1}\overrightarrow{A\Gamma}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\,||\,\overrightarrow{A\Gamma}$ που είναι άτοπο.

Αν $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\neq 0$, τότε από $(1)\Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma}=-\frac{\frac{x}{2}+y-1}{\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}\overrightarrow{AB}\Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma}\,||\,\overrightarrow{AB}$ που είναι άτοπο.

Άρα $\begin{cases}\frac{x}{2}+y-1=0\\ \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3x}{2}=1\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{2}{3}$. Άρα $\overrightarrow{A\Theta}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A\Delta},\ \overrightarrow{B\Theta}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$.

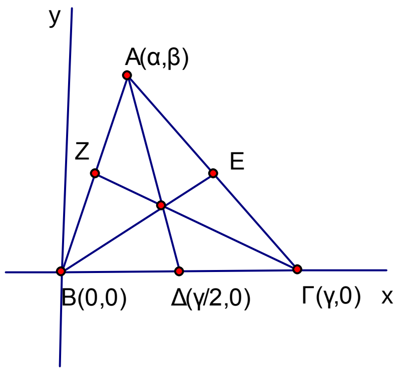
Είναι $\overrightarrow{\Gamma\Theta}=\overrightarrow{A\Theta}-\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)-\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$ και

$\overrightarrow{\Theta Z}=\overrightarrow{AZ}-\overrightarrow{A\Theta}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$.

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{\Gamma\Theta}=2\overrightarrow{\Theta Z}\Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Theta}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma Z}$.

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β, η πλευρά βΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x. Αν $\Gamma(\gamma,0)$ και $A(\alpha,\beta)$, τότε το μέσο Ε του ΑΓ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\alpha+\gamma}{2},\frac{\beta}{2}\right)$.



Η ΒΕ έχει εξίσωση $y=\dfrac{\frac{\beta}{2}}{\frac{\alpha+\gamma}{2}}x \Leftrightarrow y=\dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}x$ και η ΑΔ έχει εξίσωση:

$y-0=\dfrac{\beta-0}{\alpha-\frac{\gamma}{2}}\left(x-\dfrac{\gamma}{2}\right) \Leftrightarrow y=\dfrac{2\beta}{2\alpha-\gamma}x-\dfrac{\beta\gamma}{2\alpha-\gamma}$. Για τις συντεταγμένες του Θ, έχουμε:

$$\begin{cases} y=\dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}x \\ y=\dfrac{2\beta}{2\alpha-\gamma}x-\dfrac{\beta\gamma}{2\alpha-\gamma}\end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\beta}{3} \\ x=\dfrac{\alpha+\gamma}{3}\end{cases}$$, δηλαδή $\Theta\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{3},\dfrac{\beta}{3}\right)$.

Η ΓΖ έχει εξίσωση: $y-0=\dfrac{\frac{\beta}{2}-0}{\frac{\alpha}{2}-\gamma}(x-\gamma) \Leftrightarrow y=\dfrac{\beta}{\alpha-2\gamma}x-\dfrac{\beta\gamma}{\alpha-2\gamma}$.

Για να διέρχεται η ΓΖ από το Θ, πρέπει:

$\dfrac{\beta}{3}=\dfrac{\beta}{\alpha-2\gamma}\dfrac{\alpha+\gamma}{3}-\dfrac{\beta\gamma}{\alpha-2\gamma} \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{3}=\dfrac{\beta\alpha+\beta\gamma-3\beta\gamma}{3(\alpha-2\gamma)} \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{3}=\dfrac{\beta\alpha-2\beta\gamma}{3(\alpha-2\gamma)} \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{3}=\dfrac{\beta\cancel{(\alpha-2\gamma)}}{3\cancel{(\alpha-2\gamma)}}$ που ισχύει.

Είναι $(\mathrm{B}\Theta)=\sqrt{\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\beta}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma+\beta^2}}{3}$,

$(\mathrm{BE})=\sqrt{\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma+\beta^2}}{2}$, άρα $(\mathrm{B}\Theta)=\dfrac{2}{3}(\mathrm{BE})$.

Όμοια $(\mathrm{A}\Theta)=\dfrac{2}{3}(\mathrm{A}\Delta)$ και $(\Gamma\Theta)=\dfrac{2}{3}(\mathrm{A}\Gamma)$.

Περίκεντρο τριγώνου

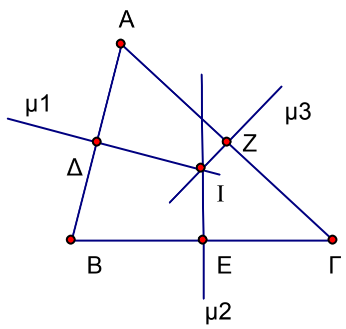
17. Να αποδείξετε ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

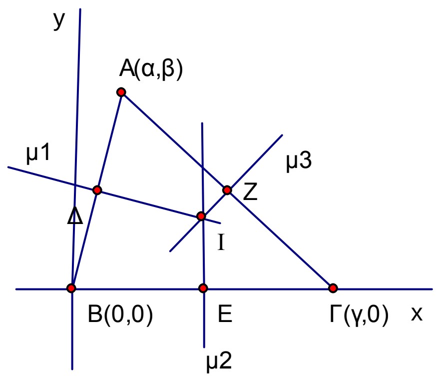
Ευκλείδεια

Εστω ότι οι μεσοκάθετοι μ_1,μ_2 των ΑΒ,ΒΓ αντίστοιχα, τέμνονται στο I.

Τότε $\mathrm{IA}=\mathrm{IB}$ και $\mathrm{IB}=\mathrm{I}\Gamma$, άρα και $\mathrm{IA}=\mathrm{I}\Gamma$. Δηλαδή το I ισαπέχει από τα Α και Γ, άρα ανήκει και στη μεσοκάθετο μ_3 της ΑΓ.



Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β, η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x. Εστω ότι $\Gamma(\gamma,0)$ και $A(\alpha,\beta)$. Τα μέσα Δ,Ε,Ζ έχουν συντεταγμένες $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\gamma}{2},0\right)$ και $\left(\frac{\alpha+\gamma}{2},\frac{\beta}{2}\right)$.

Εστω ότι οι μεσοκάθετοι μ_1,μ_2 των ΑΒ,ΒΓ αντίστοιχα, τέμνονται στο I.

Θα αποδείξουμε ότι και η μεσοκάθετος μ_3 της ΑΓ διέρχεται από το I.

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{\beta}{\alpha}$ και $AB\perp\mu_1 \Leftrightarrow \lambda_{AB}\cdot\lambda_{\mu_1}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\mu_1}=-\frac{\alpha}{\beta}$.

Η μ_1 έχει εξίσωση: $y-\frac{\beta}{2}=-\frac{\alpha}{\beta}\left(x-\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow y=-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\beta}$

Η μ_2 έχει εξίσωση: $x=\frac{\gamma}{2}$. Για τις συντεταγμένες του I, έχουμε:

$$\begin{cases} y=-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\beta} \\ x=\frac{\gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{\alpha}{\beta}\frac{\gamma}{2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha\gamma}{2\beta} \\ x=\frac{\gamma}{2} \end{cases}$$

, δηλαδή $I\left(\frac{\gamma}{2},\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha\gamma}{2\beta}\right)$.

Είναι $\lambda_{A\Gamma}=\frac{\beta}{\alpha-\gamma}$ και $A\Gamma\perp\mu_3 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma}\cdot\lambda_{\mu_3}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\mu_3}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta}$.

Η μ_3 έχει εξίσωση $y-\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma-\alpha}{2}\left(x-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \Leftrightarrow y=\frac{\gamma-\alpha}{\beta}x+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\beta}$.

Για να διέρχεται η μ_3 από το I, πρέπει:

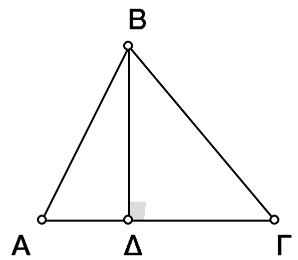
$$\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha\gamma}{2\beta}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\frac{\gamma}{2}+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha\gamma}{2\beta}=\frac{\gamma^2-\alpha\gamma+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\beta}$$

που ισχύει.

18. Εστω ΒΔ το ύψος τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι: Αν $A<90^\circ$, τότε $B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2-2A\Gamma\cdot A\Delta$ (θεώρημα οξείας γωνίας).

Λύση

Ευκλείδεια



Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΔ τρίγωνο, έχουμε:

$$B\Gamma^2=\Delta\Gamma^2+B\Delta^2 \quad (1)$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΔΒΓ τρίγωνο, έχουμε:

$$B\Delta^2=BA^2-A\Delta^2 \quad (2)$$

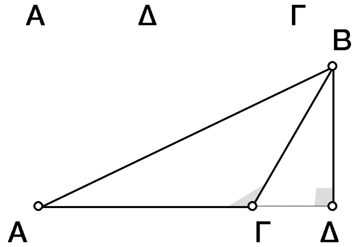
Αν $\hat{\Gamma}<90^\circ$, τότε $\Delta\Gamma=A\Gamma-A\Delta$, ενώ αν $\hat{\Gamma}>90^\circ$, τότε $\Delta\Gamma=A\Delta-A\Gamma$,

σε κάθε περίπτωση είναι: $\Delta\Gamma^2=A\Delta^2-2A\Delta\cdot A\Gamma+A\Gamma^2$ (3)

Η σχέση (1) λόγω των (2),(3), γίνεται:

$B\Gamma^2=A\Delta^2-2A\Delta\cdot A\Gamma+A\Gamma^2+BA^2-A\Delta^2 \Leftrightarrow$

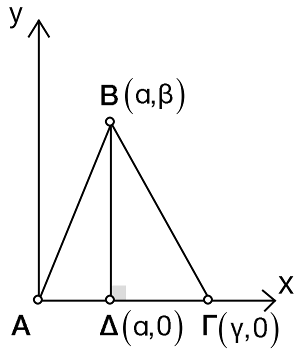
$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2-2A\Delta\cdot A\Gamma$



Διανύσματα

$$\vec{B\Gamma}^2 = \left(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}\right)^2 = \vec{A\Gamma}^2 - 2\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB} + \vec{AB}^2 = \vec{A\Gamma}^2 - 2\vec{A\Gamma}\cdot \text{προβ}_{\vec{A\Gamma}}\vec{AB} + \vec{AB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{B\Gamma}^2 = \vec{AB}^2 + \vec{A\Gamma}^2 - 2\vec{A\Gamma}\cdot\vec{A\Delta}$$



Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή O των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α, η πλευρά ΑΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x. Αν $\Gamma(\gamma,0)$ και $B(\alpha,\beta)$, τότε το σημείο Δ έχει συντεταγμένες $(\alpha,0)$.

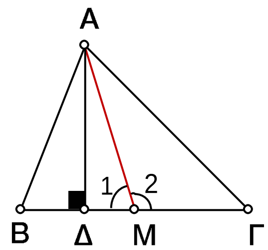
Είναι $(B\Gamma) = \sqrt{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}$, $(AB)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $(A\Gamma)=\gamma$ και $(A\Delta)=\alpha$,

$$AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma\cdot A\Delta = \left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 + \gamma^2 - 2\gamma\alpha = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\gamma\alpha = (\alpha-\gamma)^2+\beta^2 = (B\Gamma)^2$$

19. Εστω ΑΜ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι: $\beta^2+\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$ (1ο θεώρημα διαμέσων).

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ΑΔ το ύψος του τριγώνου. Αν $A\Gamma > AB$, τότε το Δ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Μ,Β, οπότε $M_1 < 90^\circ$ και $M_2 > 90^\circ$.

Από το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΒ, έχουμε:

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2MB\cdot M\Delta \quad (1)$$

Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΓ, έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AM^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma\cdot M\Delta \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2), προκύπτει:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2M\Gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2+\beta^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Διανύσματα

$$\vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 = \vec{A\Gamma}^2 + \vec{AB}^2 = \left(\vec{AM}+\vec{M\Gamma}\right)^2 + \left(\vec{AM}+\vec{MB}\right)^2 \Leftrightarrow$$

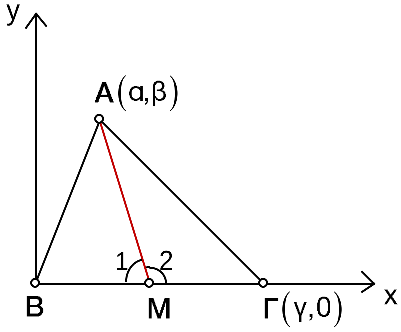
$$\vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 = \vec{AM}^2 + 2\vec{AM}\cdot\vec{M\Gamma} + \vec{M\Gamma}^2 + \vec{AM}^2 + 2\vec{AM}\cdot\vec{MB} + \vec{MB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 = 2\vec{AM}^2 + 2\vec{AM}\cdot\left(\vec{M\Gamma}+\vec{MB}\right) + \vec{M\Gamma}^2 + \vec{MB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 = 2\vec{\mu}_\alpha^2 + 2\vec{AM}\cdot\cancel{\left(\vec{M\Gamma}+\vec{MB}\right)}^0 + \left(\frac{\vec{\alpha}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\vec{\alpha}}{2}\right)^2 = 2\vec{\mu}_\alpha^2 + 2\frac{\vec{\alpha}^2}{4} = 2\vec{\mu}_\alpha^2 + \frac{\vec{\alpha}^2}{2}$$

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή O των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή B, η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x. Αν $\Gamma(\gamma,0)$ και $A(\alpha,\beta)$, τότε το μέσο M του ΒΓ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\gamma}{2},0\right)$. Είναι



$$(A\Gamma)^2+(AB)^2=\left(\sqrt{(\alpha-0)^2+(\beta-0)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+(\beta-0)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(A\Gamma)^2+(AB)^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$(A\Gamma)^2+(AB)^2=2\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2-2\alpha\gamma \quad (1)$$

$$2(AM)^2+\frac{1}{2}(B\Gamma)^2=2\left(\sqrt{\left(\alpha-\frac{\gamma}{2}\right)^2+(\beta-0)^2}\right)^2+\frac{1}{2}\gamma^2=2\left(\alpha^2-\alpha\gamma+\frac{\gamma^2}{4}\right)+2\beta^2+\frac{\gamma^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$2(AM)^2+\frac{1}{2}(B\Gamma)^2=2\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+2\beta^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $(A\Gamma)^2+(AB)^2=2(AM)^2+\frac{1}{2}(B\Gamma)^2$.

20. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA,ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E =\parallel B\Gamma$.

Λύση

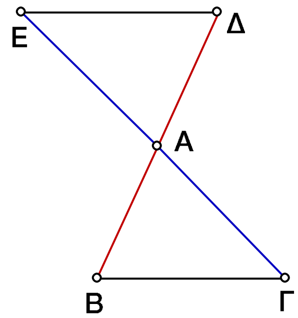
Ευκλείδεια

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ, έχουν:

$AB = A\Delta$

$A\Gamma = AE$ και

$B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$



Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε και $\Delta E = B\Gamma$, $\Delta\hat{E}A = A\hat{\Gamma}B$ και επειδή οι γωνίες αυτές είναι και εντός εναλλάξ, είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$

Διανύσματα

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\overrightarrow{E\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}$.

Είναι $\overrightarrow{E\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Gamma}$

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή O ταυτίζεται με την κορυφή B του τριγώνου και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

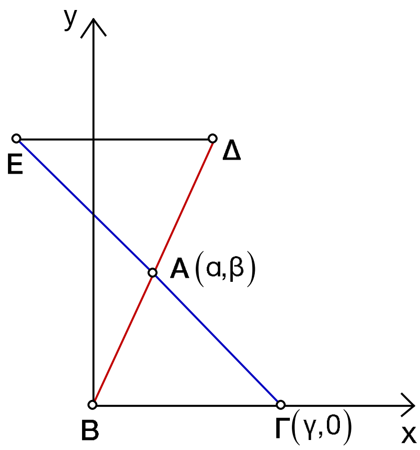
Εστω $A(\alpha,\beta)$ και $\Gamma(\gamma,0)$.

Επειδή $AB = A\Delta$, το A είναι μέσο του ΒΔ, οπότε;

$x_A=\frac{x_B+x_\Delta}{2} \Leftrightarrow x_\Delta=2\alpha$ και $y_A=\frac{y_B+y_\Delta}{2} \Leftrightarrow y_\Delta=2\beta$,

άρα $\Delta(2\alpha,2\beta)$.

Επειδή $A\Gamma = AE$, το A είναι μέσο του ΓΕ, άρα:



$x_A = \frac{x_Γ + x_E}{2} \Leftrightarrow x_E = 2α - γ$ και $y_A = \frac{y_Γ + y_E}{2} \Leftrightarrow y_E = 2β$, άρα $E(2α-γ, 2β)$.

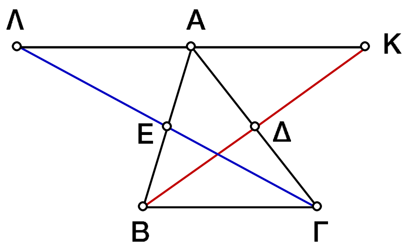
Επειδή $y_Δ = y_E = 2β$, η ΔΕ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, άρα $ΔΕ \parallel ΒΓ$.

Είναι $(ΔΕ) = |2α - (2α - γ)| = γ = (ΒΓ)$.

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ θεωρούμε σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΔΚ = ΒΔ$ και $ΕΛ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ,Α,Λ είναι συνευθειακά και το Α είναι μέσο του ΚΛ.

Λύση

Ευκλείδεια



Τα τετράπλευρα ΑΒΓΚ και ΑΛΒΓ είναι παραλληλόγραμμα γιατί οι διαγώνιές τους διχοτομούνται.
Οπότε $ΑΛ =\parallel ΒΓ$ και $ΑΚ =\parallel ΒΓ$, άρα $ΑΛ =\parallel ΑΚ$.
Επειδή $ΑΛ \parallel ΑΚ$, τα σημεία Α,Κ,Λ είναι συνευθειακά.

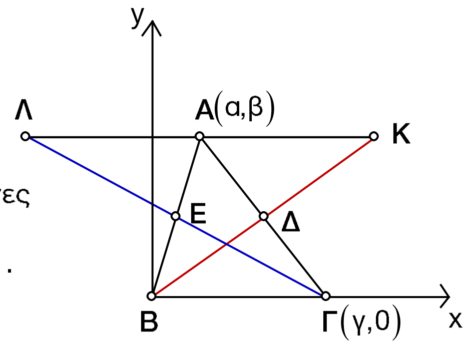
Διανύσματα

$$\overrightarrow{ΑΚ} = \overrightarrow{ΒΚ} - \overrightarrow{ΒΑ} = 2\overrightarrow{ΒΔ} - \overrightarrow{ΒΑ} = 2\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΒΓ}\right) - \overrightarrow{ΒΑ} = \overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΒΓ} - \overrightarrow{ΒΑ} = \overrightarrow{ΒΓ} \text{ και}$$

$$\overrightarrow{ΛΑ} = \overrightarrow{ΓΑ} - \overrightarrow{ΓΛ} = \overrightarrow{ΓΑ} - 2\overrightarrow{ΓΕ} = \overrightarrow{ΓΑ} - 2\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ΓΑ} + \overrightarrow{ΓΒ}\right) = \overrightarrow{ΓΑ} - \overrightarrow{ΓΑ} - \overrightarrow{ΓΒ} = \overrightarrow{ΒΓ}.$$

Είναι $\overrightarrow{ΛΑ} = \overrightarrow{ΑΚ}$, άρα τα σημεία Α,Λ,Κ είναι συνευθειακά και το Α είναι μέσο του ΚΛ.

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Β του τριγώνου και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.
Αν $A(α,β)$, $Γ(γ,0)$, τότε το μέσο Δ του ΑΓ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{α+γ}{2}, \frac{β}{2}\right)$ και το μέσο Ε του ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{α}{2}, \frac{β}{2}\right)$.
Επειδή το Δ είναι μέσο του ΒΚ, έχουμε:

$x_Δ = \frac{x_B + x_K}{2} \Leftrightarrow x_K = 2x_Δ = 2\frac{α+γ}{2} = α + γ$ και $y_Δ = \frac{y_B + y_K}{2} \Leftrightarrow y_K = 2y_Δ = 2\frac{β}{2} = β$, άρα $K(α+γ, β)$.

Επειδή το Ε είναι μέσο του ΓΛ, έχουμε:

$x_E = \frac{x_Γ + x_Λ}{2} \Leftrightarrow x_Λ = 2x_E - x_Γ = 2\frac{α}{2} - γ = α - γ$ και $y_E = \frac{y_Γ + y_Λ}{2} \Leftrightarrow y_Λ = 2y_E = 2\frac{β}{2} = β$,

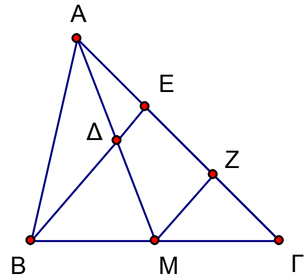
άρα $Λ(α-γ, β)$.

Επειδή $y_Λ = y_A = y_K$, τα σημεία Α,Κ,Λ είναι σε ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x, οπότε είναι συνευθειακά.

Επειδή $\frac{x_K + x_Λ}{2} = \frac{α + γ + α - γ}{2} = α = x_A$, το Α είναι μέσο του ΚΛ.

22. Εστω Δ το μέσο της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ. Αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 3AE$.

Λύση



Ευκλείδεια

Εστω Ζ το μέσο του ΕΓ. Στο τρίγωνο ΒΕΓ τα Μ,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $MZ \parallel BE$.

Στο τρίγωνο ΑΜΖ το Δ είναι μέσο της ΑΜ και $\Delta E \parallel MZ$, άρα Ε μέσο του ΑΖ. Οπότε $AE = EZ = Z\Gamma \Rightarrow A\Gamma = 3AE$

Διανύσματα

Εστω ότι $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Delta} = y\overrightarrow{BE}$. Τότε:

$$\overrightarrow{B\Delta} = y\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AB} = y\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = yx\overrightarrow{A\Gamma} - y\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right) - \overrightarrow{AB} - yx\overrightarrow{A\Gamma} + y\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} - yx\overrightarrow{A\Gamma} + y\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{4} - 1 + y\right)\overrightarrow{AB} - \left(\frac{1}{4} - yx\right)\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{4} + y\right)\overrightarrow{AB} - \left(\frac{1}{4} - yx\right)\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \ (1)$$

Αν $\left(-\frac{3}{4} + y\right) \neq 0$, τότε $(1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \dfrac{\frac{1}{4} - yx}{-\frac{3}{4} + y}\overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A\Gamma}$ που είναι άτοπο.

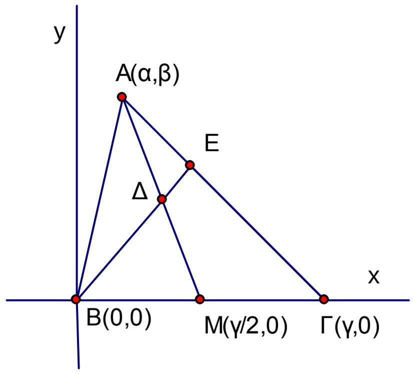
Αν $\left(\frac{1}{4} - yx\right) \neq 0$, τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \dfrac{-\frac{3}{4} + y}{\frac{1}{4} - yx}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} \parallel \overrightarrow{AB}$ που είναι άτοπο.

Άρα $\begin{cases} -\frac{3}{4} + y = 0 \\ \frac{1}{4} - yx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$, οπότε $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = 3\overrightarrow{AE}$

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Β του τριγώνου και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Αν $A(\alpha,\beta)$, $\Gamma(\gamma,0)$, τότε το μέσο Μ του ΒΓ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\gamma}{2}, 0\right)$ και το μέσο Δ της ΑΜ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{2\alpha+\gamma}{4}, \frac{\beta}{2}\right)$.



Η ευθεία ΒΔ έχει εξίσωση: $y = \dfrac{\frac{\beta}{2}}{\frac{2\alpha+\gamma}{4}}x \Leftrightarrow y = \dfrac{2\beta}{\alpha+\gamma}x$.

Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση: $y-0=\frac{\beta}{\alpha-\gamma}(x-\gamma) \Leftrightarrow y=\frac{\beta}{\alpha-\gamma}x-\frac{\beta\gamma}{\alpha-\gamma}$.

Για τις συντεταγμένες του Ε έχουμε:

$$\begin{cases} y=\frac{\beta}{\alpha-\gamma}x-\frac{\beta\gamma}{\alpha-\gamma} \\ y=\frac{2\beta}{\alpha+\gamma}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\beta}{\alpha+\gamma}x=\frac{\beta}{\alpha-\gamma}x-\frac{\beta\gamma}{\alpha-\gamma} \\ y=\frac{2\beta}{\alpha+\gamma}x \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{2\beta}{3} \\ y=\frac{2\alpha+\gamma}{3} \end{cases}$$

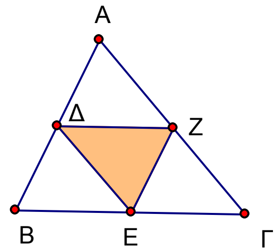
, δηλαδή $E\left(\frac{2\alpha+\gamma}{3},\frac{2\beta}{3}\right)$.

Είναι $(AE)=\sqrt{\left(\alpha-\frac{2\alpha+\gamma}{3}\right)^2+\left(\beta-\frac{2\beta}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}=\frac{1}{3}(A\Gamma)$

23. Εστω Δ,Ε,Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι $(\Delta EZ)=\frac{1}{4}(AB\Gamma)$

Λύση

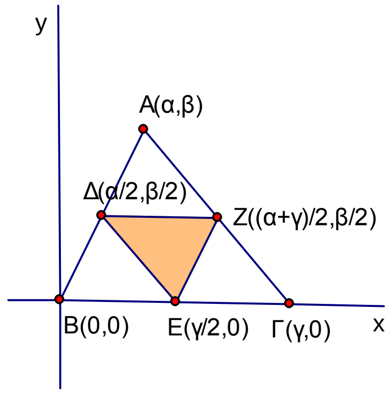
Ευκλείδεια



Επειδή τα Δ,Ε,Ζ είναι μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι: $\Delta Z \parallel B\Gamma$, $\Delta E \parallel A\Gamma$, $EZ \parallel AB$. Επειδή τα τετράπλευρα ΑΔΕΖ, ΒΔΖΕ, ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμα, ισχύει ότι:

$(\Delta EZ)=(A\Delta Z)$, $(\Delta EZ)=(\Delta EB)$, $(\Delta EZ)=(EZ\Gamma)$, άρα $(\Delta EZ)=\frac{1}{4}(AB\Gamma)$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Β του τριγώνου και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.
Αν $A(\alpha,\beta)$, $\Gamma(\gamma,0)$, τότε τα μέσα Δ,Ε,Ζ έχουν συντεταγμένες:

$\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\gamma}{2},0\right)$, $\left(\frac{\alpha+\gamma}{2},\frac{\beta}{2}\right)$ αντίστοιχα.

Είναι $\overrightarrow{BA}=(\alpha,\beta)$, $\overrightarrow{B\Gamma}(\gamma,0)$, $\det\left(\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{B\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & 0\end{vmatrix}=-\gamma\beta$, οπότε

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{B\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\beta\gamma$

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ, έχουμε: $\overrightarrow{E\Delta}=\left(\frac{\alpha-\gamma}{2},\frac{\beta}{2}\right)$, $\overrightarrow{EZ}=\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$,

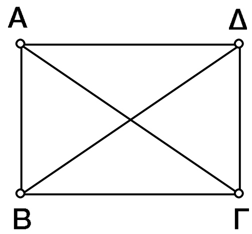
$\det\left(\overrightarrow{E\Delta},\overrightarrow{EZ}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\alpha-\gamma}{2} & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2}\end{vmatrix}=\frac{\alpha\beta-\beta\gamma}{4}-\frac{\alpha\beta}{4}=-\frac{\beta\gamma}{4}$, οπότε $(\Delta EZ)=\frac{1}{4}\left|\det\left(\overrightarrow{E\Delta},\overrightarrow{EZ}\right)\right|=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\beta\gamma=\frac{1}{4}(AB\Gamma)$.

Ορθογώνιο

24. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιες του είναι ίσες.

Λύση

Ευκλείδεια



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ έχουν

$B = \hat{\Gamma} = 90^\circ$,

$AB = \Gamma\Delta$ (απέναντι πλευρές του ορθογωνίου)

ΒΓ κοινή πλευρά

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε και $A\Gamma = B\Delta$

Διανύσματα

Εστω $|\vec{AB}| = |\vec{\Gamma\Delta}| = \alpha > 0$ και $|\vec{A\Delta}| = |\vec{B\Gamma}| = \beta > 0$, τότε

$$|\vec{A\Gamma}|^2 = |\vec{AB} + \vec{B\Gamma}|^2 = (\vec{AB} + \vec{B\Gamma})^2 = \vec{AB}^2 + 2\vec{AB}\cdot\vec{B\Gamma} + \vec{B\Gamma}^2 = |\vec{AB}|^2 + 2\cdot 0 + |\vec{B\Gamma}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (\vec{AB} \perp \vec{B\Gamma})$$

$$|\vec{B\Delta}|^2 = |\vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta}|^2 = (\vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta})^2 = \vec{B\Gamma}^2 + 2\vec{B\Gamma}\cdot\vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Gamma\Delta}^2 = |\vec{B\Gamma}|^2 + 2\cdot 0 + |\vec{\Gamma\Delta}|^2 = \beta^2 + \alpha^2 \quad (\vec{B\Gamma} \perp \vec{\Gamma\Delta})$$

Άρα $|\vec{A\Gamma}|^2 = |\vec{B\Delta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{A\Gamma}| = |\vec{B\Delta}|$

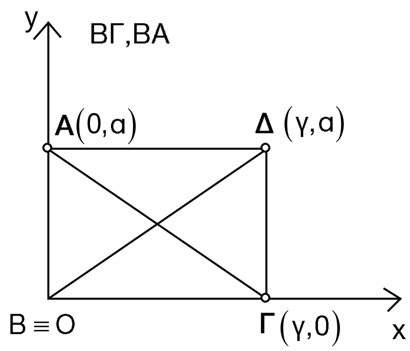
Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο η κορυφή Β του ορθογωνίου ταυτίζεται με την αρχή Ο των αξόνων και οι πλευρές ΒΓ,ΒΑ αντίστοιχα βρίσκονται επί των ημιαξόνων Οx, Oy.

Εστω ότι το Γ έχει συντεταγμένες $(\gamma,0)$ και το $A(0,\alpha)$. Τότε το σημείο Δ έχει συντεταγμένες (γ,α).

Είναι $(A\Gamma) = \sqrt{(\gamma-0)^2 + (0-\alpha)^2} = \sqrt{\gamma^2+\alpha^2}$ και

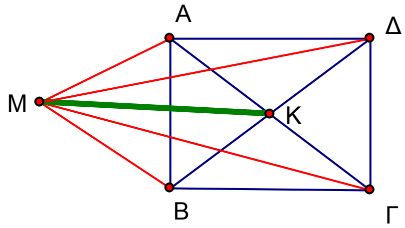
$(B\Delta) = \sqrt{(\gamma-0)^2 + (\alpha-0)^2} = \sqrt{\gamma^2+\alpha^2}$, άρα $(A\Gamma) = (B\Delta)$



25. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. και Μ τυχαίο σημείο του επιπέδου του. Να αποδείξετε $MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$.

Λύση

Ευκλείδεια



Από το 1ο θεώρημα των διαμέσων στα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ, έχουμε: $MA^2 + M\Gamma^2 = 2MK^2 + \frac{A\Gamma^2}{2}$ και

$MB^2 + M\Delta^2 = 2MK^2 + \frac{B\Delta^2}{2}$. Όμως $A\Gamma = B\Delta$, γιατί οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες, άρα $MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$.

Διανύσματα

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{M\Gamma}^2=\overrightarrow{AM}^2+\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AM}\right)^2=\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{A\Gamma}^2-2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM}^2\Leftrightarrow$$

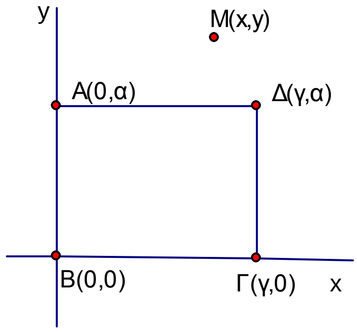
$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{M\Gamma}^2=2\overrightarrow{AM}^2+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}\right)^2-2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}\right)\cdot\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{M\Gamma}^2=2\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{AB}^2+2\cancelto{0}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}}+\overrightarrow{A\Delta}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{M\Gamma}^2=\overrightarrow{AM}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AM}^2-2\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Delta}^2\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{M\Gamma}^2=\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{A\Delta}\right)^2=\overrightarrow{BM}^2+\overrightarrow{\Delta M}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{M\Delta}^2$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο η κορυφή Β του ορθογωνίου ταυτίζεται με την αρχή Ο των αξόνων και οι πλευρές ΒΓ,ΒΑ αντίστοιχα βρίσκονται επί των ημιαξόνων Οx, Oy.
Εστω ότι το Γ έχει συντεταγμένες $(\gamma,0)$ και το $A(0,\alpha)$, τότε το Δ έχει συντεταγμένες (γ,α). Αν το Μ έχει συντεταγμένες (x,y), τότε:

$$(MA)^2+(M\Gamma)^2=\left(\sqrt{x^2+(y-\alpha)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}\right)^2=x^2+(y-\alpha)^2+(x-\gamma)^2+y^2$$

$$(MB)^2+(M\Delta)^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-\gamma)^2+(y-\alpha)^2}\right)^2=x^2+y^2+(x-\gamma)^2+(y-\alpha)^2.$$

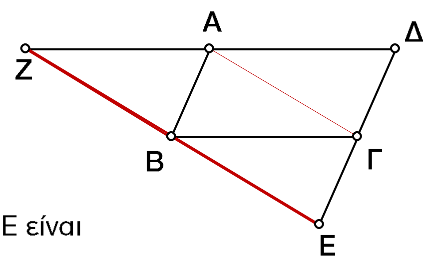
Άρα $(MA)^2+(M\Gamma)^2=(MB)^2+(M\Delta)^2$

Παραλληλόγραμμο

26. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα $\Gamma E=\Delta\Gamma$ και τη ΔΑ κατά τμήμα $AZ=\Delta A$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ,Β,Ε είναι συνευθειακά.

Λύση

Ευκλείδεια



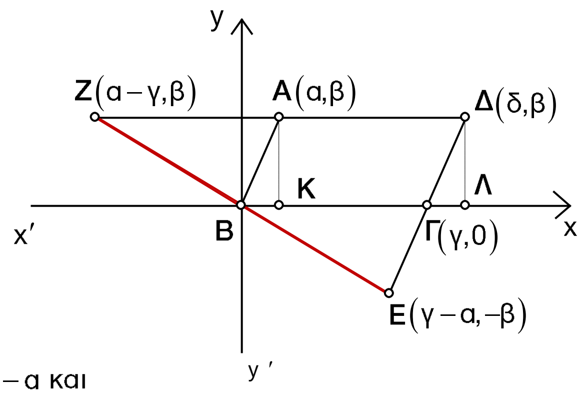
Είναι $AZ=A\Delta$ και $A\Delta =\parallel B\Gamma$, άρα και $AZ =\parallel B\Gamma$, οπότε το τετράπλευρο ΑΓΒΖ είναι παραλληλόγραμμο,
άρα $ZB\parallel A\Gamma$ (1).
$\Gamma E=\Delta\Gamma$ και $\Delta\Gamma =\parallel AB$, άρα $\Gamma E =\parallel AB$, οπότε το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $BE\parallel A\Gamma$ (2).
Από τις σχέσεις (1),(2), προκύπτει ότι $ZB\parallel BE$, άρα τα σημεία Ζ,Β,Ε είναι συνευθειακά.

Διανύσματα

$\overrightarrow{ZB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta A}$ και $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{\Gamma E}-\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta A}$, άρα $\overrightarrow{ZB}=\overrightarrow{BE}$ οπότε τα σημεία Ζ,Β,Ε είναι συνευθειακά.

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή O ταυτίζεται με την κορυφή B και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.



Εστω $A(\alpha,\beta)$, $\Delta(\delta,\beta)$ $(AB \parallel x'x)$ και $\Gamma(\gamma,0)$.

Είναι $(A\Delta)=(B\Gamma) \Leftrightarrow \delta-\alpha=\gamma \Leftrightarrow \delta=\alpha+\gamma$,

Επειδή $AZ=\Delta A=\delta-\alpha=\gamma$ και $AZ \parallel x'x$, είναι $x_Z=\alpha-\gamma$ και $y_Z=\beta$, δηλαδή $Z(\alpha-\gamma,\beta)$.

Επειδή $\Gamma E=\Delta\Gamma$, το Γ είναι μέσο του ΔΕ, άρα

$\dfrac{x_\Delta+x_E}{2}=x_\Gamma \Leftrightarrow \delta+x_E=2\gamma \Leftrightarrow \alpha+\gamma+x_E=2\gamma \Leftrightarrow x_E=\gamma-\alpha$ και

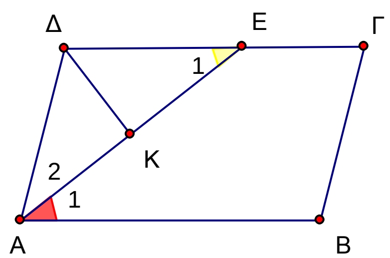
$\dfrac{y_\Delta+y_E}{2}=y_\Gamma \Leftrightarrow \beta+y_E=0 \Leftrightarrow y_E=-\beta$, άρα $E(\gamma-\alpha,-\beta)$.

Παρατηρούμε ότι $\dfrac{x_Z+x_E}{2}=\dfrac{\alpha-\gamma+\gamma-\alpha}{2}=0=x_B$ και $\dfrac{y_Z+y_E}{2}=\dfrac{\beta-\beta}{2}=0=x_B$, δηλαδή το B είναι το μέσο του EZ, άρα τα σημεία Z,B,E είναι συνευθειακά.

27. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΓΔ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $\Delta E=B\Gamma$.

Λύση

Ευκλείδεια



Επειδή $AB \parallel \Delta\Gamma$ οι γωνίες A_1 και E_1 είναι ίσες ως εντός εναλλάξ. Όμως $A_1=A_2$ λόγω της διχοτόμησης, άρα $A_2=E_1$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές και $\Delta E=A\Delta=B\Gamma$.

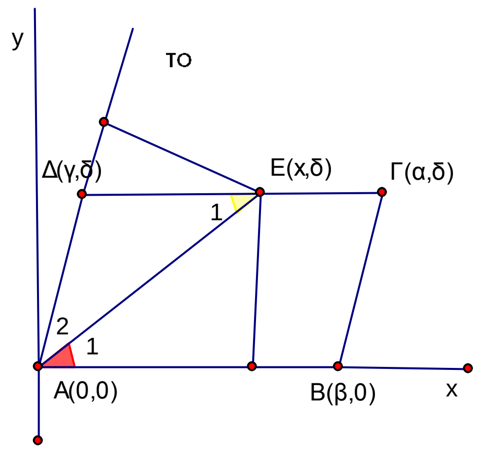
Διανύσματα

$\left|\overrightarrow{\Delta E}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta E}^2=\overrightarrow{B\Gamma}^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}\right)^2=\overrightarrow{A\Delta}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}^2-2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{A\Delta}+\cancel{\overrightarrow{A\Delta}^2}=\cancel{\overrightarrow{A\Delta}^2} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AE}\left(\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{A\Delta}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{A\Delta}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\left(\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{\Delta A}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\cdot 2\overrightarrow{\Delta K}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{\Delta K}$

όπου Κ το μέσο του ΑΕ.

Άρα στο τρίγωνο ΑΔΕ, η ΔΚ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και $\Delta E=A\Delta=B\Gamma$



Συντεταγμένες

Είναι $(AB)=(\Gamma\Delta) \Leftrightarrow \beta=\alpha-\gamma \Leftrightarrow \alpha=\beta+\gamma$,

Η ευθεία ΑΕ έχει εξίσωση $y=\dfrac{\delta}{\gamma}x \Leftrightarrow \delta x-\gamma y=0$.

Επειδή το Ε ανήκει στη διχοτόμο της Α, ισχύει ότι:

$d(E,A\Delta)=d(E,AB) \Leftrightarrow$

$$\frac{|\delta x-\gamma\delta|}{\sqrt{\delta^2+\gamma^2}}=\delta \Leftrightarrow \cancel{\delta}|x-\gamma|=\cancel{\delta}\sqrt{\delta^2+\gamma^2} \Leftrightarrow x^2-2\gamma x+\gamma^2=\delta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow x^2-2\gamma x-\delta^2=0 \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{2\gamma\pm 2\sqrt{\delta^2+\gamma^2}}{2}=\gamma\pm\sqrt{\delta^2+\gamma^2}.$$

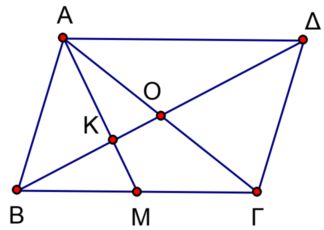
Επειδή $x>\gamma$ είναι $x=\gamma+\sqrt{\delta^2+\gamma^2}$.

Τότε $ΒΓ=ΑΔ=\sqrt{\delta^2+\gamma^2}$ και $ΔΕ=x-\gamma=\sqrt{\delta^2+\gamma^2}$, δηλαδή $ΔΕ=ΑΔ$

28. Εστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Αν η ΑΜ τέμνει τη ΒΔ στο Κ, να αποδείξετε ότι: $ΒΚ=\frac{1}{3}ΒΔ$ και $ΚΜ=\frac{1}{3}ΑΜ$.

Λύση

Ευκλείδεια



Στο τρίγωνο ΑΒΓ οι ΒΟ,ΑΜ είναι διάμεσοι, οπότε το Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Άρα $ΒΚ=\frac{2}{3}ΒΟ=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}ΒΔ=\frac{1}{3}ΒΔ$ και $ΚΜ=\frac{1}{3}ΑΜ$.

Διανύσματα

Εστω $\overrightarrow{ΒΚ}=\kappa\overrightarrow{ΒΔ}$ και $\overrightarrow{ΚΜ}=\lambda\overrightarrow{ΑΜ}$. Τότε

$$\overrightarrow{ΒΚ}+\overrightarrow{ΚΜ}=\kappa\overrightarrow{ΒΔ}+\lambda\overrightarrow{ΑΜ}\Leftrightarrow\overrightarrow{ΒΜ}=\kappa\left(\overrightarrow{ΑΔ}-\overrightarrow{ΑΒ}\right)+\lambda\left(\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΒΜ}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{ΒΓ}=\kappa\overrightarrow{ΑΔ}-\kappa\overrightarrow{ΑΒ}+\lambda\overrightarrow{ΑΒ}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{ΒΓ}\Leftrightarrow\kappa\overrightarrow{ΑΔ}-\kappa\overrightarrow{ΑΒ}+\lambda\overrightarrow{ΑΒ}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{ΒΓ}-\frac{1}{2}\overrightarrow{ΒΓ}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

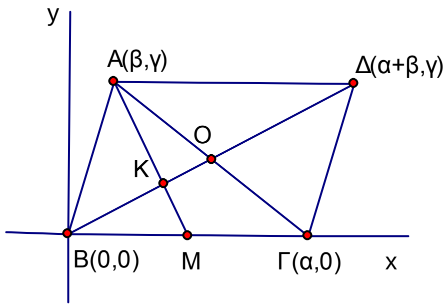
$$\kappa\overrightarrow{ΑΔ}-\kappa\overrightarrow{ΑΒ}+\lambda\overrightarrow{ΑΒ}+\frac{\lambda-1}{2}\overrightarrow{ΑΔ}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\kappa+\frac{\lambda-1}{2}\right)\overrightarrow{ΑΔ}+(\lambda-\kappa)\overrightarrow{ΑΒ}=\vec{0}\ (1)$$

Αν $\kappa+\frac{\lambda-1}{2}\neq 0$, τότε από $(1)\Rightarrow\overrightarrow{ΑΔ}=-\frac{\lambda-\kappa}{\kappa+\frac{\lambda-1}{2}}\overrightarrow{ΑΒ}\Rightarrow\overrightarrow{ΑΔ}\parallel\overrightarrow{ΑΒ}$ που είναι άτοπο.

Αν $\lambda-\kappa\neq 0$, , τότε από $(1)\Rightarrow\overrightarrow{ΑΒ}=-\frac{\kappa+\frac{\lambda-1}{2}}{\lambda-\kappa}\overrightarrow{ΑΔ}\Rightarrow\overrightarrow{ΑΔ}\parallel\overrightarrow{ΑΒ}$ που είναι άτοπο. Άρα

$$\begin{cases}\kappa+\frac{\lambda-1}{2}=0\\ \lambda-\kappa=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa+\frac{\kappa-1}{2}=0\\ \lambda=\kappa\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\kappa+\kappa-1=0\\ \lambda=\kappa\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\kappa=\frac{1}{3}.$$ Άρα $\overrightarrow{ΒΚ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ΒΔ}$ και $\overrightarrow{ΚΜ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΜ}$.

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Εστω $Α(\beta,\gamma)$, $Δ(\delta,\gamma)$ $(ΑΔ\parallel x'x)$ και $Γ(\alpha,0)$.

Είναι $(ΑΔ)=(ΒΓ)\Leftrightarrow\delta-\beta=\alpha\Leftrightarrow\delta=\alpha+\beta$.

Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΒΓ είναι $\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$.

Η ευθεία ΑΜ έχει εξίσωση: $y=\frac{\gamma}{\beta-\frac{\alpha}{2}}\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\Leftrightarrow y=\frac{2\gamma}{2\beta-\alpha}x-\frac{\alpha\gamma}{2\beta-\alpha}$.

Η ευθεία ΒΔ έχει εξίσωση: $y=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}x$.

Για τις συντεταγμένες του Κ, έχουμε:

$$\begin{cases} y=\frac{2\gamma}{2\beta-\alpha}x+\frac{\alpha\gamma}{2\beta-\alpha} \\ y=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{\gamma}{\alpha+\beta}x=\frac{2\gamma}{2\beta-\alpha}x-\frac{\alpha\gamma}{2\beta-\alpha} \\ y=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{\gamma}{\alpha+\beta}x-\frac{2\gamma}{2\beta-\alpha}x=-\frac{\alpha\gamma}{2\beta-\alpha} \\ y=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}x \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3\cancel{\alpha\gamma}}{(\alpha+\beta)\cancel{(2\beta-\alpha)}}x=\frac{\cancel{\alpha\gamma}}{\cancel{2\beta-\alpha}} \\ y=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{\alpha+\beta}{3} \\ y=\frac{\gamma}{3} \end{cases}, \text{ άρα } K\left(\frac{\alpha+\beta}{3},\frac{\gamma}{3}\right).$$

Είναι $(BK)=\sqrt{\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)^2+\frac{\gamma^2}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{(\alpha+\beta)^2+\gamma^2}$ και $(B\Delta)=\sqrt{(\alpha+\beta)^2+\gamma^2}$, άρα $(BK)=\frac{1}{3}(B\Delta)$.

Είναι $(AK)=\sqrt{\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{3}\right)^2+\left(\gamma-\frac{\gamma}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{(2\beta-\alpha)^2+4\gamma^2}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{(2\beta-\alpha)^2+4\gamma^2}$ και

$(AM)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)^2+\gamma^2}=\sqrt{\frac{(\alpha-2\beta)^2+4\gamma^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{(2\beta-\alpha)^2+4\gamma^2}\Leftrightarrow\sqrt{(2\beta-\alpha)^2+4\gamma^2}=2(AM)$

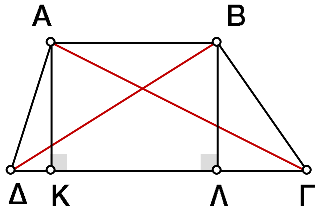
άρα $(AK)=\frac{2}{3}(AM)$.

Τραπέζιο

29. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ ισχύει:
$A\Gamma^2+B\Delta^2=A\Delta^2+B\Gamma^2+2AB\cdot\Gamma\Delta$.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ΑΒ η μικρή βάση του τραπεζίου. Τότε $\Delta<90^\circ$ και $\hat{\Gamma}<90^\circ$

Από το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΔΓ, έχουμε:

$A\Gamma^2=A\Delta^2+\Delta\Gamma^2-2\Delta\Gamma\cdot\Delta K$ (1)

Από το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΒΔΓ, έχουμε:

$B\Delta^2=B\Gamma^2+\Delta\Gamma^2-2\Delta\Gamma\cdot\Gamma\Lambda$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1),(2), προκύπτει:

$A\Gamma^2+B\Delta^2=A\Delta^2+B\Gamma^2+2\Delta\Gamma^2-2\Delta\Gamma\cdot\Delta K-2\Delta\Gamma\cdot\Gamma\Lambda\Leftrightarrow$

$A\Gamma^2+B\Delta^2=A\Delta^2+B\Gamma^2+2\Delta\Gamma(\Delta\Gamma-\Delta K-\Gamma\Lambda)\Leftrightarrow$

$A\Gamma^2+B\Delta^2=A\Delta^2+B\Gamma^2+2\Delta\Gamma\cdot K\Lambda$ (3)

Επειδή $ΑΚ \perp ΔΓ$ και $ΔΓ \parallel ΑΒ$, θα είναι και $ΑΚ \perp ΑΒ$, άρα το τετράπλευρο ΑΚΛΒ είναι ορθογώνιο, οπότε $ΚΛ = ΑΒ$ και η σχέση (3) γίνεται: $ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + 2ΑΒ \cdot ΓΔ$

Διανύσματα

Θα αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{ΑΓ}^2 + \overrightarrow{ΒΔ}^2 = \overrightarrow{ΑΔ}^2 + \overrightarrow{ΒΓ}^2 + 2\overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΔΓ}$

Είναι $\overrightarrow{ΑΓ}^2 + \overrightarrow{ΒΔ}^2 = \left(\overrightarrow{ΔΓ} - \overrightarrow{ΔΑ}\right)^2 + \left(\overrightarrow{ΓΔ} - \overrightarrow{ΓΒ}\right)^2 \Leftrightarrow$

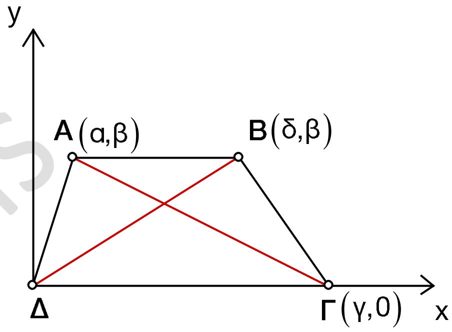
$\overrightarrow{ΑΓ}^2 + \overrightarrow{ΒΔ}^2 = \overrightarrow{ΔΓ}^2 - 2\overrightarrow{ΔΓ} \cdot \overrightarrow{ΔΑ} + \overrightarrow{ΔΑ}^2 + \overrightarrow{ΓΔ}^2 - 2\overrightarrow{ΓΔ} \cdot \overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΓΒ}^2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{ΑΓ}^2 + \overrightarrow{ΒΔ}^2 = \overrightarrow{ΔΑ}^2 + \overrightarrow{ΓΒ}^2 + 2\overrightarrow{ΔΓ}^2 - 2\overrightarrow{ΔΓ} \cdot \overrightarrow{ΔΑ} + 2\overrightarrow{ΔΓ} \cdot \overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΓΒ}^2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{ΑΓ}^2 + \overrightarrow{ΒΔ}^2 = \overrightarrow{ΑΔ}^2 + \overrightarrow{ΒΓ}^2 + 2\overrightarrow{ΔΓ}\left(\overrightarrow{ΔΓ} - \overrightarrow{ΔΑ} + \overrightarrow{ΓΒ}\right) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{ΑΓ}^2 + \overrightarrow{ΒΔ}^2 = \overrightarrow{ΑΔ}^2 + \overrightarrow{ΒΓ}^2 + 2\overrightarrow{ΔΓ}\left(\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΓΒ}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{ΑΓ}^2 + \overrightarrow{ΒΔ}^2 = \overrightarrow{ΑΔ}^2 + \overrightarrow{ΒΓ}^2 + 2\overrightarrow{ΔΓ} \cdot \overrightarrow{ΑΒ}$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Δ του τραπεζίου και η πλευρά ΔΓ να βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Εστω $Α(α,β)$, $Γ(γ,0)$ και επειδή $ΑΒ \parallel ΔΓ$, $Β(δ,β)$.

Είναι $(ΑΓ)^2 + (ΒΔ)^2 = \left(\sqrt{(γ-α)^2 + (0-β)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{δ^2 + β^2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$(ΑΓ)^2 + (ΒΔ)^2 = γ^2 - 2αγ + α^2 + β^2 + δ^2 + β^2 \Leftrightarrow$

$(ΑΓ)^2 + (ΒΔ)^2 = γ^2 + 2β^2 + δ^2 + α^2 - 2αγ$ (1)

$(ΑΔ)^2 + (ΒΓ)^2 + 2(ΑΒ) \cdot (ΓΔ) = \left(\sqrt{α^2 + β^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(γ-δ)^2 + β^2}\right)^2 + 2(δ-α)γ \Leftrightarrow$

$(ΑΔ)^2 + (ΒΓ)^2 + 2(ΑΒ) \cdot (ΓΔ) = α^2 + β^2 + γ^2 - 2γδ + δ^2 + β^2 + 2δγ - 2αγ \Leftrightarrow$

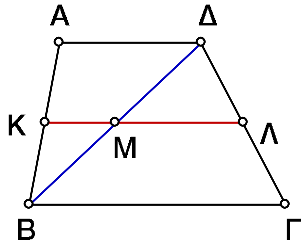
$(ΑΔ)^2 + (ΒΓ)^2 + 2(ΑΒ) \cdot (ΓΔ) = α^2 + 2β^2 + γ^2 + δ^2 - 2αγ$ (2).

Από τις σχέσεις (1),(2), προκύπτει ότι: $(ΑΓ)^2 + (ΒΔ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΓ)^2 + 2(ΑΒ) \cdot (ΓΔ)$.

30. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεών του.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω Κ το μέσο της ΑΒ και $ΚΛ \parallel ΒΓ \parallel ΑΔ$. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΔ το Μ είναι μέσο της ΒΔ και $ΚΜ = \dfrac{ΑΔ}{2}$.

Επειδή στο τρίγωνο ΒΓΔ, το Μ είναι μέσο της ΒΔ και η ΜΛ είναι παράλληλη στη ΒΓ, το Λ είναι μέσο της ΓΔ και $ΜΛ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.

Άρα η ΚΛ είναι η διάμεσος του τραπεζίου και $ΚΛ \parallel ΒΓ \parallel ΑΔ$.

Επίσης $ΚΛ = ΚΜ + ΜΛ = \dfrac{ΑΔ}{2} + \dfrac{ΒΓ}{2} = \dfrac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$.

Διανύσματα

Θα αποδείξουμε ότι $|\overrightarrow{ΚΛ}|=\dfrac{|\overrightarrow{ΒΓ}|+|\overrightarrow{ΑΔ}|}{2}$.

$\overrightarrow{ΚΛ}=\overrightarrow{ΚΑ}+\overrightarrow{ΑΔ}+\overrightarrow{ΔΛ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{ΒΑ}+\overrightarrow{ΔΛ}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{ΔΓ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{ΒΑ}+2\overrightarrow{ΔΑ}+\overrightarrow{ΔΓ}\right)\Leftrightarrow$

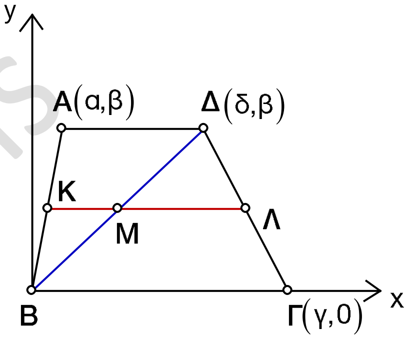
$\overrightarrow{ΚΛ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{ΒΑ}+\overrightarrow{ΑΔ}+\overrightarrow{ΔΓ}+\overrightarrow{ΑΔ}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{ΒΓ}+\overrightarrow{ΑΔ}\right)$

Είναι $|\overrightarrow{ΚΛ}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{ΒΓ}+\overrightarrow{ΑΔ}|$.

Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$ είναι ομόρροπα, ισχύει ότι: $|\overrightarrow{ΒΓ}+\overrightarrow{ΑΔ}|=|\overrightarrow{ΒΓ}|+|\overrightarrow{ΑΔ}|$, άρα

$|\overrightarrow{ΚΛ}|=\dfrac{|\overrightarrow{ΒΓ}|+|\overrightarrow{ΑΔ}|}{2}$.

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Εστω $Α(α,β)$, $Δ(δ,β)$ $(ΑΒ\parallel x΄x)$ και $Γ(γ,0)$.

Επειδή το Κ είναι μέσο του ΑΒ, είναι $Κ\left(\dfrac{α}{2},\dfrac{β}{2}\right)$.

Επειδή το Λ είναι μέσο ΓΔ, είναι $Λ\left(\dfrac{γ+δ}{2},\dfrac{β}{2}\right)$.

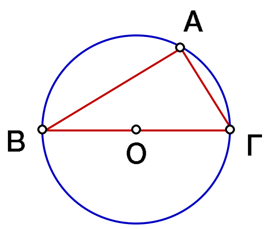
Είναι $(ΒΓ)=γ$, $(ΑΔ)=δ-α$ και $(ΚΛ)=\dfrac{γ+δ}{2}-\dfrac{α}{2}=\dfrac{δ-α+γ}{2}=\dfrac{(ΑΔ)+(ΒΓ)}{2}$.

Κύκλος

31. Να αποδείξετε ότι κάθε γωνία εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.

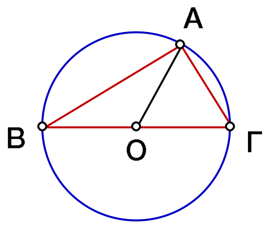
Λύση

Ευκλείδεια



Επειδή το ημικύκλιο είναι 180° και κάθε εγγεγραμμένη είναι ίση με το μισό του τόξου στο οποίο αντιστοιχεί, ισχύει ότι: $ΒΑΓ=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$.

Διανύσματα



Εστω ότι ο κύκλος έχει ακτίνα ρ.

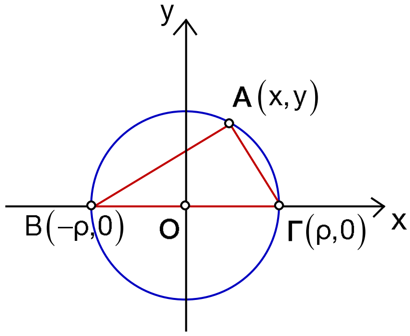
Είναι $\overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}=\left(\overrightarrow{ΟΒ}-\overrightarrow{ΟΑ}\right)\left(\overrightarrow{ΟΓ}-\overrightarrow{ΟΑ}\right)=\overrightarrow{ΟΒ}\cdot\overrightarrow{ΟΓ}-\overrightarrow{ΟΒ}\cdot\overrightarrow{ΟΑ}-\overrightarrow{ΟΑ}\cdot\overrightarrow{ΟΓ}+\overrightarrow{ΟΑ}^2\Leftrightarrow$

$$\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = |\vec{OB}|\cdot|\vec{O\Gamma}|\,\text{συν}180^\circ - |\vec{OB}|\cdot|\vec{OA}|\,\text{συν}AOB - |\vec{OA}|\cdot|\vec{O\Gamma}|\,\text{συν}AO\Gamma + |\vec{OA}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = \rho\cdot\rho(-1) - \rho\cdot\rho\,\text{συν}AOB - \rho\cdot\rho\,\text{συν}\left(180^\circ - AOB\right) + \rho^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = -\rho^2 - \rho^2\text{συν}AOB + \rho^2\text{συν}AOB + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{AB}\perp\vec{A\Gamma}$$

Συντεταγμένες



Εστω ότι ο κύκλος έχει ακτίνα ρ.
Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων όπου η αρχή O είναι το κέντρο του κύκλου. Έστω διάμετρος ΒΓ με $B(-\rho,0)$ και $\Gamma(\rho,0)$. Έστω σημείο $A(x,y)$ του κύκλου. Τότε:

$$(OA)=\rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\rho \Leftrightarrow x^2+y^2=\rho^2 \Leftrightarrow y^2=\rho^2-x^2 \quad (1)$$

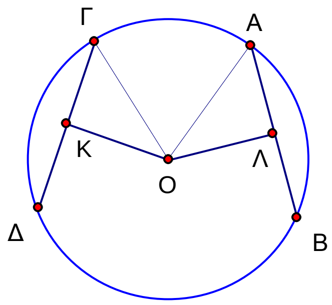
Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{y}{x+\rho}$, $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{y}{x-\rho}$ και

$$\lambda_{AB}\lambda_{A\Gamma}=\frac{y}{x+\rho}\cdot\frac{y}{x-\rho}=\frac{y^2}{x^2-\rho^2}\overset{(1)}{=}\frac{y^2}{-y^2}=-1 \Leftrightarrow AB\perp A\Gamma \Leftrightarrow BA\Gamma=90^\circ.$$

32. Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ότι $AB=\Gamma\Delta$, τότε και $\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\Gamma\Delta}{2}\Leftrightarrow \Gamma K=A\Lambda$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΑ και ΟΛΑ είναι ίσα γιατί έχουν $O\Gamma=OA$ και $\Gamma K=A\Lambda$, οπότε θα είναι και $OK=O\Lambda$.
Αντίστροφα: Εστω ότι $OK=O\Lambda$. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΑ και ΟΛΑ είναι ίσα γιατί έχουν $O\Gamma=OA$ και $OK=O\Lambda$, οπότε θα είναι και

$$\Gamma K=A\Lambda \Leftrightarrow \frac{AB}{2}=\frac{\Gamma\Delta}{2}\Leftrightarrow AB=\Gamma\Delta$$

Διανύσματα

$$|\vec{OK}|=|\vec{O\Lambda}| \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}\left(\vec{O\Gamma}+\vec{O\Delta}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)\right| \Leftrightarrow |\vec{O\Gamma}+\vec{O\Delta}|^2=|\vec{OA}+\vec{OB}|^2 \Leftrightarrow$$

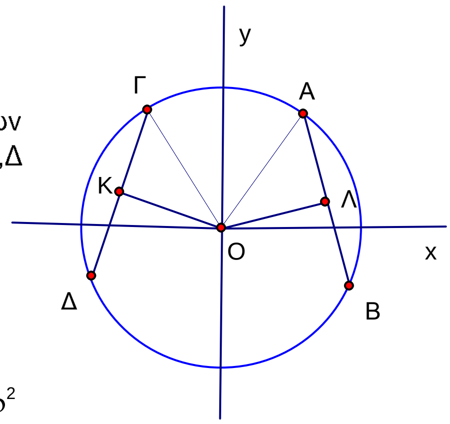
$$\vec{O\Gamma}^2+2\vec{O\Gamma}\cdot\vec{O\Delta}+\vec{O\Delta}^2=\vec{OA}^2+2\vec{OA}\cdot\vec{OB}+\vec{OB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\rho^2}+2|\vec{O\Gamma}|\cdot|\vec{O\Delta}|\,\text{συν}\widehat{\Gamma O\Delta}+\cancel{\rho^2}=\cancel{\rho^2}+2|\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|\,\text{συν}\widehat{AOB}+\cancel{\rho^2} \Leftrightarrow$$

$$2\rho^2\text{συν}\Gamma O\Delta=2\rho^2\text{συν}AOB \Leftrightarrow \text{συν}\Gamma O\Delta=\text{συν}AOB \Leftrightarrow$$

$$\Gamma O\Delta=AOB \Leftrightarrow \Gamma\Delta=AB \Leftrightarrow \Gamma\Delta=AB \Leftrightarrow |\vec{AB}|=|\vec{\Gamma\Delta}|$$

Συντεταγμένες



Εστω ότι ο κύκλος έχει ακτίνα ρ. Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων όπου η αρχή Ο είναι το κέντρο του κύκλου. Εστω ότι τα σημεία Α,Β,Γ,Δ έχουν συντεταγμένες (α_1,α_2), (β_1,β_2), (γ_1,γ_2), (δ_1,δ_2) αντίστοιχα.

Τότε επειδή τα Κ,Λ είναι μέσα των ΑΒ,ΓΔ έχουν συντεταγμένες $\left(\frac{\gamma_1+\delta_1}{2},\frac{\gamma_2+\delta_2}{2}\right)$ και $\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2},\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}\right)$ αντίστοιχα.

Επειδή τα σημεία Α,Β,Γ,Δ είναι ομοκυκλικά, ισχύει ότι

$(ΟΑ)=(ΟΒ)=(ΟΓ)=(ΟΔ)\Leftrightarrow \alpha_1^2+\alpha_2^2=\beta_1^2+\beta_2^2=\gamma_1^2+\gamma_2^2=\delta_1^2+\delta_2^2=\rho^2$

Είναι $(ΑΒ)=(ΓΔ)\Leftrightarrow \sqrt{(\beta_1-\alpha_1)^2+(\beta_2-\alpha_2)^2}=\sqrt{(\gamma_1-\delta_1)^2+(\gamma_2-\delta_2)^2}\Leftrightarrow$

$\alpha_1^2-2\beta_1\alpha_1+\beta_1^2+\beta_2^2-2\beta_2\alpha_2+\alpha_2^2=\gamma_1^2-2\gamma_1\delta_1+\delta_1^2+\gamma_2^2-2\gamma_2\delta_2+\delta_2^2\Leftrightarrow$

$\cancel{2\rho^2}-2\beta_1\alpha_1-2\beta_2\alpha_2=\cancel{2\rho^2}-2\gamma_1\delta_1-2\gamma_2\delta_2\Leftrightarrow \beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2=\gamma_1\delta_1+\gamma_2\delta_2$

$(ΟΚ)=(ΟΛ)\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(\alpha_1+\beta_1)^2}{4}+\frac{(\alpha_2+\beta_2)^2}{4}}=\sqrt{\frac{(\gamma_1+\delta_1)^2}{4}+\frac{(\gamma_2+\delta_2)^2}{4}}\Leftrightarrow$

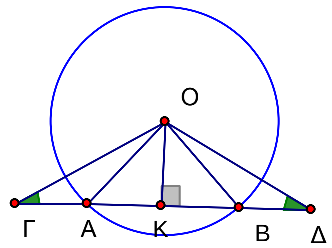
$\frac{\alpha_1^2+2\beta_1\alpha_1+\beta_1^2+\beta_2^2+2\beta_2\alpha_2+\alpha_2^2}{4}=\frac{\gamma_1^2+2\gamma_1\delta_1+\delta_1^2+\gamma_2^2+2\gamma_2\delta_2+\delta_2^2}{4}\Leftrightarrow$

$\cancel{2\rho^2}+2\beta_1\alpha_1+2\beta_2\alpha_2=\cancel{2\rho^2}+2\gamma_1\delta_1+2\gamma_2\delta_2\Leftrightarrow \beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2=\gamma_1\delta_1+\gamma_2\delta_2$ που ισχύει

33. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο της άκρα κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΟΓΑ=ΟΔΒ$

Λύση

Ευκλείδεια



$ΟΑ=ΟΒ\Rightarrow Ο\overset{\Delta}{Α}Β$ ισοσκελές $\Rightarrow ΟΑΒ=ΟΒΑ\Rightarrow ΟΑΓ=ΟΒΔ$.

Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ είναι ίσα γιατί έχουν $ΟΑ=ΟΒ=\rho$,

$ΑΓ=ΒΔ$ και $ΟΑΓ=ΟΒΔ$, οπότε θα είναι και $ΟΓΑ=ΟΔΒ$.

Διανύσματα

Εστω ΟΚ το απόστημα της χορδής ΑΒ.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $συνΟΑΓ=συνΟΒΔ\Leftrightarrow \frac{\vec{ΓΟ}\cdot\vec{ΓΑ}}{|\vec{ΓΟ}|\cdot|\vec{ΓΑ}|}=\frac{\vec{ΔΟ}\cdot\vec{ΔΒ}}{|\vec{ΔΟ}|\cdot|\vec{ΔΒ}|}$.

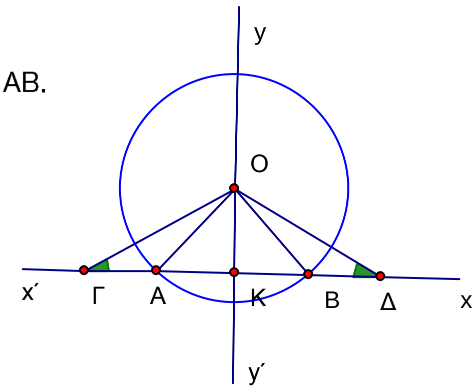
Όμως $|\vec{ΓΟ}|=|\vec{ΔΟ}|$ και $|\vec{ΓΑ}|=|\vec{ΔΒ}|$, οπότε αρκεί $\vec{ΓΟ}\cdot\vec{ΓΑ}=\vec{ΔΟ}\cdot\vec{ΔΒ}$.

Είναι $\vec{ΓΟ}\cdot\vec{ΓΑ}=\vec{ΓΑ}προβ_{\vec{ΓΑ}}\vec{ΓΟ}=\vec{ΓΑ}\cdot\vec{ΓΚ}=|\vec{ΓΑ}||\vec{ΓΚ}|$ και $\vec{ΔΟ}\cdot\vec{ΔΒ}=\vec{ΔΒ}\cdot προβ_{\vec{ΔΒ}}\vec{ΔΟ}=\vec{ΔΒ}\cdot\vec{ΔΚ}=|\vec{ΔΒ}||\vec{ΔΚ}|$

όμως $|\vec{ΓΑ}|=|\vec{ΔΒ}|$ και $|\vec{ΓΚ}|=|\vec{ΔΚ}|$, οπότε και $\vec{ΓΟ}\cdot\vec{ΓΑ}=\vec{ΔΟ}\cdot\vec{ΔΒ}$

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων όπου η αρχή των αξόνων είναι το απόστημα Κ της ΑΒ και ο άξονας x΄x είναι ο φορέας του ΑΒ. Εστω $B(\alpha,0)$, τότε $A(-\alpha,0)$. Έστω $\Delta(\gamma,0)$, τότε $\Gamma(-\gamma,0)$



Εστω ακόμη $O(0,y)$. Είναι $\lambda_{O\Delta}=\dfrac{y-0}{0+\gamma}=\dfrac{y}{\gamma}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi O\Gamma A=\dfrac{y}{\gamma}$.

$\lambda_{O\Delta}=\dfrac{y-0}{0-\gamma}=-\dfrac{y}{\gamma}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi O\Delta x=-\dfrac{y}{\gamma}\Leftrightarrow$

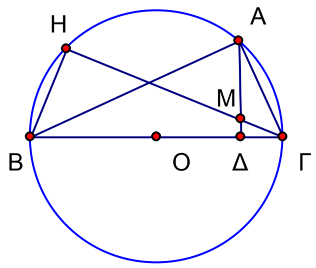
$\varepsilon\varphi\left(180^\circ-O\Delta B\right)=-\dfrac{y}{\gamma}\Leftrightarrow -\varepsilon\varphi O\Delta B=-\dfrac{y}{\gamma}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi O\Delta B=\dfrac{y}{\gamma}$

Άρα $\varepsilon\varphi O\Gamma A=\varepsilon\varphi O\Delta B\Leftrightarrow O\Gamma A=O\Delta B$

34. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A=90^\circ\right)$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω ΑΔ το ύψος του. Αν μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το Γ τέμνει το ύψος στο Μ και τον κύκλο στο Η, να αποδείξετε ότι: $\Gamma M\cdot\Gamma H=\Gamma A^2$.

Λύση

Ευκλείδεια



Είναι $BH\Gamma=90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο

Στο τετράπλευρο ΒΗΜΔ είναι $BH\Gamma+\Delta=180^\circ$, οπότε είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Οι ΗΜ,ΒΔ είναι χορδές του περιγεγραμμένου κύκλου του ΒΗΜΔ, που τέμνονται στο Γ, οπότε $\Gamma M\cdot\Gamma H=\Gamma\Delta\cdot\Gamma B$ (1).
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΓΔ είναι η προβολή του ΓΑ στη ΓΒ, οπότε $\Gamma A^2=\Gamma\Delta\cdot\Gamma B$ (2). Από τις (1),(2) $\Rightarrow \Gamma M\cdot\Gamma H=\Gamma A^2$.

Διανύσματα

$$\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma H}=\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\Gamma M}}\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\Gamma B}}\overrightarrow{\Gamma M}=\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma H}=\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\Gamma B}}\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=\left(\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{\Gamma A}^2+\cancelto{0}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}}=\overrightarrow{\Gamma A}^2.$$