25η Άσκηση

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
ε) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(f(2x) - f(x)\right)$.

ζ) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{9x^2+1} + 3x\right) < \left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right)\left(\sqrt{16x^2+1} + 4x\right)$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \Leftrightarrow e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2-1=2xe^{f(x)} \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1 \quad (1)$

Επειδή $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $\varphi(x)=e^{f(x)}-x\neq 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Είναι $\varphi(0)=e^{f(0)}-0=1>0$ άρα $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η (1) γίνεται:

$e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}=\sqrt{x^2+1}+x \quad (2)$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $x^2+1>x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2} \Leftrightarrow |x|<\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1} \Rightarrow$

$0<\sqrt{x^2+1}+x$, οπότε η (2) γίνεται $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

β) Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$ και $-x\in D_f$

Αρκεί $f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \Leftrightarrow$

$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=0 \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2=1 \Leftrightarrow x^2+1-x^2=1$ ισχύει

γ) Έστω $h(x)=\sqrt{x^2+1}+x$, $x\in\mathbb{R}$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$h(x_1)-h(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}+x_1-\left(\sqrt{x_2^2+1}+x_2\right)=\sqrt{x_1^2+1}+x_1-\sqrt{x_2^2+1}-x_2=$$

$$\frac{\left(\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}\right)\left(\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}\right)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+(x_1-x_2)=\frac{x_1^2+\cancel{1}-x_2^2-\cancel{1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+(x_1-x_2)=$$

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+(x_1-x_2)=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+1\right)=$$

$$(x_1-x_2)\frac{x_1+x_2+\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}=(x_1-x_2)\frac{h(x_1)+h(x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}$$

Είναι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $h(x_1)>0$ και $h(x_2)>0$. Επειδή $x_1<x_2$ είναι $x_1-x_2<0$ και ακόμη $\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}>0$, οπότε $h(x_1)-h(x_2)<0 \Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2) \Leftrightarrow \ln h(x_1)<\ln h(x_2) \Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0\text{, οπότε}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln h(x)\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\u\to0^+}}{\overset{h(x)=u}{=}}\lim_{u\to0^+}\ln u=-\infty$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right] = +\infty$, οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln h(x) \underset{\substack{x\to+\infty \Rightarrow \\ u\to+\infty}}{\overset{h(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

ε) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x = e^y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = e^y - x \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 = \left(e^y - x\right)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}+1 = e^{2y} - 2xe^y + \cancel{x^2} \Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}$, άρα

$f^{-1}(y) = \dfrac{e^{2y}-1}{2e^y},\ y \in \mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x},\ x \in \mathbb{R}$.

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(2x) - f(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right) - \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

Θέτουμε $\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{\sqrt{x^2+1}+x} = u$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \dfrac{2+2}{1+1} = 2$, οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(2x) - f(x)\right) = \lim\limits_{u\to2} \ln u = \ln 2$

ζ) $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right) < \left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{16x^2+1}+4x\right) \Leftrightarrow$

$\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)\right] < \ln\left[\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{16x^2+1}+4x\right)\right] \Leftrightarrow$

$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + \ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right) < \ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right) + \ln\left(\sqrt{16x^2+1}+4x\right) \Leftrightarrow$

$f(x) + f(3x) < f(2x) + f(4x)$

Αν $x \le 0$ είναι $x \ge 2x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) \ge f(2x)$, $3x \ge 4x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(3x) \ge f(4x)$ και με πρόσθεση κατά μέλη:

$f(x) + f(3x) \ge f(2x) + f(4x)$ άτοπο.

Αν $x > 0$ είναι $x < 2x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(2x)$, $3x < 4x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(3x) < f(4x)$ και με πρόσθεση κατά μέλη:

$f(x) + f(3x) < f(2x) + f(4x)$, άρα

$f(x) + f(3x) < f(2x) + f(4x) \Leftrightarrow x > 0$.