

# Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



**Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:**

**Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς**

**Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς**

**Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας**



**2019 - 2020**



**Ασκησόπολις**  
ο πιο πλούσιος κόσμος  
θεμάτων και ασκήσεων

## 12ο Διαγώνισμα

30 - 5 - 2020

## Θέμα Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^a$ ,  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = ax^{a-1}$ , δηλαδή  $(x^a)' = ax^{a-1}$ .

μονάδες 5

**A2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και

$$\text{ισχύει } (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

μονάδες 5

**A3.** Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

μονάδες 3

**A4.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

**A5.** Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f^2(x) - 1 = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Βρείτε το λάθος στη παρακάτω

$$\text{διαδικασία: } f^2(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{1} \Leftrightarrow |f(x)| = 1 \Leftrightarrow f(x) = \pm 1, \text{ άρα } f(x) = 1, x \in \mathbb{R} \\ \text{ή } f(x) = -1, x \in \mathbb{R}.$$

μονάδες 4

**A6.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν ορίζεται η σύνθεση της  $f$  με την  $g$  ( $g \circ f$ ), τότε έχει πεδίο ορισμού το  $A_{g \circ f} = f(A) \cap A_g$  ».

**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

**β)** Να αιτιολογήσετε με κατάλληλο παράδειγμα την απάντησή σας στο ερώτημα α..

μονάδες 4

## Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

**B1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

**B2. α)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{4}$  έχει δύο ακριβώς ρίζες μία θετική και μία αρνητική.

μονάδες 3+3

**B3.** Να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  στα οποία οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της  $f$  έχουν αντίθετες κλίσεις.

μονάδες 5

**B4.** Να δείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$  τέτοιοι ώστε  $\frac{1}{f'(\xi_1)} - \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{8}{2 \ln 2 - 1}$ .

μονάδες 6

**B5.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^{(x^2+1)f(x)}} - 1}{\text{συν}\left(\frac{x(x^2+1)f(x)}{\ln(x^2+1)}\right) - 1}$ .

μονάδες 5

## Θέμα Γ

Ο ρυθμός μεταβολής των φορέων ενός ιού, παγκόσμια λόγω επιδημίας, δίνεται σε δεκάδες εκατομμύρια

ανά μήνα από τη σχέση  $k'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , όπου  $t=0$  είναι η χρονική στιγμή που

ξεκινά η μετάδοση του ιού.

**Γ1.** Να βρείτε πιο χρονικό διάστημα ο ρυθμός μεταβολής των φορέων του ιού είναι θετικός.

μονάδες 7

**Γ2.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $k$  της εκτίμησης του πλήθους των φορέων του ιού παγκοσμίως και να αποδείξετε ότι στο τέλος της χρονικής περιόδου ο ιός έχει εξαλειφθεί.

μονάδες 7

**Γ3.** Να βρείτε πότε ο αριθμός των φορέων είναι μέγιστος.

μονάδες 7

**Γ4.** Αν η εκτίμηση για τον αριθμό των φορέων που δεν θα καταφέρουν να αναρρώσουν από τον ιό είναι 1%, να βρείτε πόσοι από τους φορείς του ιού θα καταφέρουν να αναρρώσουν, όταν ο αριθμός των φορέων του ιού είναι μέγιστος. Δίνεται ότι  $\sqrt{2} \approx 1,41$ .

μονάδες 4

## Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $(0, +\infty)$  για την οποία ισχύει ότι  $f^2(x) = x \ln x - \ln x$  για κάθε  $x > 0$ .

**Δ1.** Να βρείτε τους δυνατούς τύπους της  $f$ .

μονάδες 5

$$\text{Έστω ότι } f(x) = \sqrt{(x-1)\ln x}, \quad x > 0$$

**Δ2.** Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη.

μονάδες 5

**Δ3.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, αν γνωρίζετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$ .

μονάδες 6

**Δ4.** Να δείξετε ότι δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την  $f$ .

μονάδες 3

**Δ5.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f^2(x) = 4 - x^2$  έχει ακριβώς δύο ρίζες.

μονάδες 6

Καλή τύχη!