29η Άσκηση

Έως κανόνες παραγώγισης

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

γ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$.

δ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

ε) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

ζ) Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

η) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

θ) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(2,f(2))$.

ι) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(2\eta\mu x)-1}{2x-\pi}$.

κ) Να δείξετε ότι η ε τέμνει τη γραφική παράσταση της f^{-1} ακριβώς σε ένα σημείο. Να βρείτε διάστημα της μορφής $(\alpha,\alpha+1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ στο οποίο να περιέχεται η τετμημένη του κοινού τους σημείου.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Λύση

α) Θα αποδείξουμε ότι: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ή $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Είναι $f^3(x)+f(x)=x$ (1) και για $x=x_0$ είναι: $f^3(x_0)+f(x_0)=x_0$ (2).

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει: $f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-f(x_0)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right)=x-x_0$.

Η παράσταση $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)$ είναι 2ου βαθμού ως προς $f(x)$ με $\Delta=-3f^2(x_0)\le 0$ άρα

$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\ge 1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα

$$f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1} \quad \text{και}$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{|x-x_0|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right|} \quad (3)$$

Είναι $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\ge 1 \Leftrightarrow \left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right|\ge 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right|}\le 1 \Leftrightarrow \frac{|x-x_0|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right|}\le |x-x_0|$$

Η σχέση (3) γίνεται $\left|f(x)-f(x_0)\right|=\dfrac{|x-x_0|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right|}\le |x-x_0| \overset{x\ne x_0}{\Leftrightarrow}$

$-|x-x_0|\le f(x)-f(x_0)\le |x-x_0|$.

Επειδή $\lim_{x\to x_0}|x-x_0|=0$ και $\lim_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Για $x\ne x_0$ είναι $f(x)-f(x_0)=\dfrac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1} \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}\Leftrightarrow$$

$\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{1}{3f^2(x_0)+1}\Leftrightarrow f'(x_0)=\dfrac{1}{3f^2(x_0)+1}$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $f^3(x)+f(x)=x\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=x\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x}{f^2(x)+1}\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x^3}=\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{f^2(x)+1}$

Είναι $\left|\dfrac{f(x)}{x^3}\right|=\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{f^2(x)+1}\le\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow$ $\left(f^2(x)+1\ge 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{f^2(x)+1}\le 1\right)$

$-\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{f(x)}{x^3}\le\dfrac{1}{x^2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$.

δ) Για κάθε $x\neq 0$ είναι

$$\frac{f^3(x)}{x^3}+\frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3=\frac{1}{x^2}-\frac{f(x)}{x^3}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{f(x)}{x^3}\right)=0$$

Επειδή $\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{f^2(x)+1}>0$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3}=0$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)=0\cdot 0=0$ και όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$

ζ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $f^3(x_1)+f(x_1)<f^3(x_2)+f(x_2)$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^3<x_2^3$ και $x_1^3+x_1<x_2^3+x_2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από τη σχέση (1), έχουμε: $g(f(x_1))<g(f(x_2))\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=k\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^3(x)+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\Leftrightarrow k^3+k=-\infty$ αδύνατο.

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^3(x)+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\Leftrightarrow+\infty=-\infty$ αδύνατο, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, οπότε $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

η) $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ $1-1$ άρα η f αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y$ με $y\in\mathbb{R}$ και έχουμε: $y^3+y=x$, άρα $f^{-1}(y)=y^3+y,\ y\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$

θ) Για $x=2$ είναι $f^3(2)+f(2)=2\Leftrightarrow f^3(2)+f(2)-2=0\Leftrightarrow$

$\left(f(2)-1\right)\left(f^2(2)+f(2)+2\right)=0\Leftrightarrow f(2)=1$ ή $f^2(2)+f(2)+2=0$ αδύνατη

1	0	1	-2	ρ=1
	1	1	2	
1	1	2	0	

Επίσης $f'(2)=\frac{1}{3f^2(2)+1}=\frac{1}{4}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ε: $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

ι) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(2\eta\mu x)-1}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(2\eta\mu x)-1}{2\eta\mu x-2}\cdot\frac{2\eta\mu x-2}{2x-\pi}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(2\eta\mu x)-1}{2\eta\mu x-2}\cdot\frac{\cancel{2}(\eta\mu x-1)}{\cancel{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

Θέτουμε $2\eta\mu x = u$. Όταν $x \to \frac{\pi}{2}$ τότε $u \to 2$. Οπότε: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(2\eta\mu x)-1}{2\eta\mu x - 2} = \lim\limits_{u\to 2} \frac{f(u)-f(2)}{u-2} = f'(2) = \frac{1}{4}$.

Έστω $a(x) = \eta\mu x$, τότε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{a(x) - a\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = a'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$, οπότε

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{f(2\eta\mu x)-1}{2\eta\mu x - 2} \cdot \frac{\not{2}(\eta\mu x - 1)}{\not{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \right] = \frac{1}{4}\cdot 0 = 0$$

κ) Αρκεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^3 + x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^3 + 3x - 2 = 0$ να έχει ακριβώς μια ρίζα.

Έστω $\varphi(x) = 4x^3 + 3x - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 4x_1^3 < 4x_2^3\,(4)$ και $3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 - 2 < 3x_2 - 2\,(5)$.

Από $(4)+(5) \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi \nearrow \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(0) = -2 < 0,\ \varphi(1) = 5 > 0$, δηλαδή $\varphi(0)\varphi(1) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(\rho) = \frac{1}{4}\rho + \frac{1}{2}$. Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα, το ρ είναι μοναδικό.

Άρα $\alpha = 0$.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων