

Βασικές προτάσεις

1. Δύο αντίστροφες συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.

Απόδειξη

Εστω f γνησίως αύξουσα στο A , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ είναι $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Εστω ότι $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, τότε επειδή f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2 \text{ που είναι άτοπο.}$$

2. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εξίσωση

$$f(x) = 0 \text{ έχει το πολύ μία ρίζα.}$$

Απόδειξη

Εστω ότι f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Αν f είχε 2 ρίζες $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, τότε επειδή f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow 0 < 0$ που είναι άτοπο.

Όμοια αν f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

3. Αν η εξίσωση $y = f(x)$ έχει περισσότερες από μία λύσεις ως προς x , τότε η

συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Απόδειξη

Εστω ότι f έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 \neq \rho_2$, τότε :

Αν $\rho_1 < \rho_2$ έχουμε :

- $f(\rho_1) < f(\rho_2)$ αν f γνησίως αύξουσα
- $f(\rho_1) > f(\rho_2)$ αν f γνησίως φθίνουσα.

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $f(\rho_1) = f(\rho_2)$. Όμοια αν $\rho_1 > \rho_2$.

Επομένως f δεν είναι γνησίως μονότονη.

4. Αν οι συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε η

$$f(x) = g(x) \text{ έχει το πολύ μία ρίζα στο } A.$$

Απόδειξη

Εστω ότι f είναι γνησίως αύξουσα και g γνησίως φθίνουσα στο A . Τότε $f - g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A και $f - g$ γνησίως αύξουσα στο A . Επομένως :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow (f - g)(x) = 0$ και αφού $f - g$ είναι γνησίως αύξουσα βάση της προηγούμενης πρότασης η εξίσωση $(f - g)(x) = 0$ ή $f(x) = g(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα στο A .

5. Αν n ή α οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, τότε αυτό θα ανήκει στην ευθεία $y = x$.

Απόδειξη

Εστω $M(\alpha, \beta)$ με $\alpha \neq \beta$ το κοινό τους σημείο που δεν βρίσκεται στην $y = x$, τότε θα ισχύουν οι σχέσεις: $f(\alpha) = \beta, f^{-1}(\alpha) = \beta$ (1).

Όμως επειδή το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη C_f , το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στην αντίστροφη συνάρτηση, οπότε και το M' θα είναι κοινό τους σημείο, οπότε: $f^{-1}(\beta) = \alpha$ και $f(\beta) = \alpha$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f(f(\beta)) = \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha$ που είναι άτοπο. Άρα οι $C_f, C_{f^{-1}}$ δεν μπορούν να έχουν κοινό σημείο εκτός της $y = x$.

6. Εστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} βρίσκονται επί της ευθείας $y = x$.

Δηλαδή $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$ για κάθε $x \in A \cap f(A) \neq \emptyset$.

Απόδειξη

Εστω $M(\alpha, \alpha), \alpha \in A \cap f(A) \neq \emptyset$, σημείο τομής της C_f με την ευθεία $y = x$. Τότε $f(\alpha) = \alpha$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , είναι και 1-1, οπότε ορίζεται η f^{-1} και ισχύει: $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = f^{-1}(\alpha)$, οπότε από το σημείο M διέρχεται και η $C_{f^{-1}}$.

Αντίστροφα

Εστω $M(\alpha, \beta)$ κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$, τότε $f(\alpha) = f^{-1}(\beta)$. Αν $f(\alpha) > \alpha$ τότε και $f^{-1}(\beta) > \beta$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f(f^{-1}(\beta)) > f(\beta) \Leftrightarrow \alpha > f(\beta)$ που είναι άτοπο.

Όμοια αν $f(\alpha) < \alpha$ ισχύει: $f^{-1}(\beta) < \beta \Leftrightarrow f(f^{-1}(\beta)) < f(\beta) \Leftrightarrow \beta < f(\beta)$ που είναι άτοπο. Οπότε τελικά $f(\alpha) = \beta$ και το M ανήκει στην ευθεία $y = x$.

7. Δίνεται η 1-1 συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $A \cap f(A) \neq \emptyset$ και $f(x) \geq x$ (όμοια αν $f(x) \leq x$), για κάθε $x \in A \cap f(A)$ τότε δεν υπάρχουν κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, f^{-1} που βρίσκονται εκτός της ευθείας $y = x$.

Απόδειξη

Εστω (α, β) με $\alpha, \beta \in A \cap f(A)$ κοινό τους σημείο. Τότε: $f(\alpha) = \beta, f^{-1}(\beta) = \alpha$, και $f(\beta) = \alpha, f^{-1}(\alpha) = \beta$.

Αν $f(x) \geq x$ τότε θα είναι και: $\begin{cases} f(\alpha) \geq \alpha \\ f(\beta) \geq \beta \end{cases}$ ή $\begin{cases} \beta \geq \alpha \\ \alpha \geq \beta \end{cases}$ άρα $\alpha = \beta$, που σημαίνει ότι το κοινό τους σημείο βρίσκεται στην $y = x$.