Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

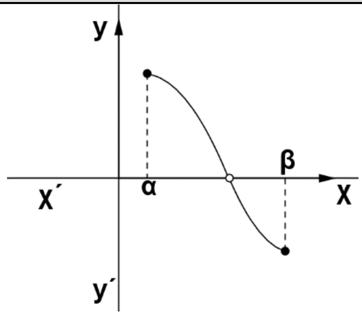
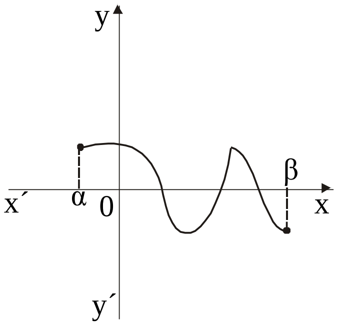
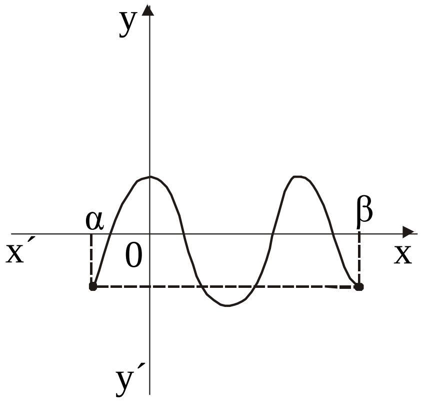
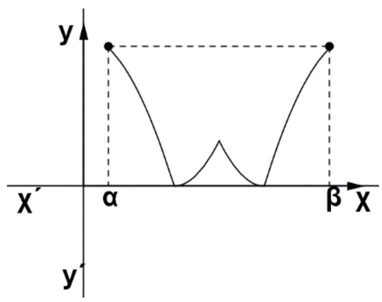
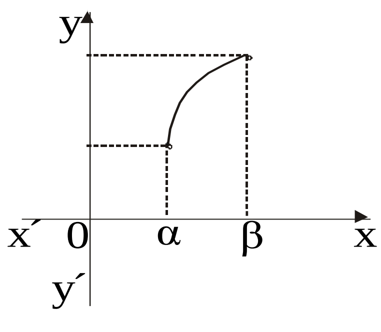
9ο Διαγώνισμα

9 - 5 - 2020

Θέμα Α

Α1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένο τον πίνακα 2, αφού αντιστοιχίσετε κάθε θεώρημα της στήλης Α του πίνακα 1 σε όσες συναρτήσεις της στήλης Β μπορεί να εφαρμοστεί στο $[\alpha,\beta]$.

Πίνακας 1

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. Θεώρημα Bolzano **2.** Θεώρημα Rolle **3.** Θεώρημα μέσης τιμής	 **α.**  **β.**  **γ.**  **δ.**  **ε.**

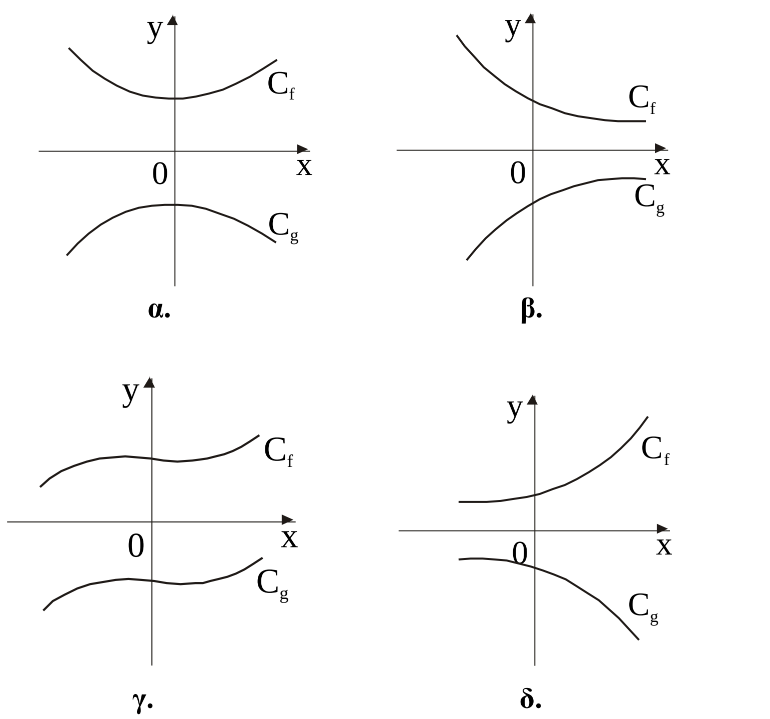
Πίνακας 2

1	2	3

μονάδες 6

Α2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένο τον πίνακα 4, αφού αντιστοιχίσετε σε κάθε σχέση της στήλης Α ένα γράφημα από τη στήλη Β του πίνακα 3. Οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Πίνακας 3

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\left(f(x)-g(x)\right)' \geq 0$ **2.** $\left(f(x)-g(x)\right)' = 0$ **3.** $\left(f(x)-g(x)\right)' \leq 0$ **4.** $\left(f(x)-g(x)\right)' > 0$, για $x>0$ και $\left(f(x)-g(x)\right)' < 0$, για $x<0$	

Πίνακας 4

1	**2**	**3**	**4**

μονάδες 8

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι:

η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

μονάδες 7

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 ,τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0)=0$».

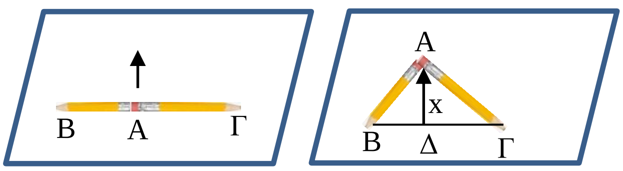
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Θέμα Β

Δύο μολύβια ΑΒ και ΑΓ με μήκη $3\sqrt{2}$ cm και $4\sqrt{2}$ cm αντίστοιχα είναι τοποθετημένα στο δάπεδο έτσι ώστε να ακουμπάνε στο σημείο Α και η γωνία ΒΑΓ να είναι 180°.



Τα πιάνουμε από το σημείο Α και τα ανασηκώνουμε κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα 0,2 cm/sec, έτσι ώστε οι άκρες Β και Γ να ακουμπάνε πάντα στο δάπεδο. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται ένα μεταβλητό τρίγωνο ΑΒΓ . Αν $Α\Delta = x\,cm$, $x \in \left[0, 3\sqrt{2}\right)$, και Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΓ, να δείξετε ότι:

Β1. $E(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{32 - x^2}$

μονάδες 5

Β2. Να βρείτε μετά από πόσα δευτερόλεπτα το τρίγωνο ΑΔΓ έχει μέγιστο εμβαδό.

μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $Α\hat{Β}\Delta = \theta$ τη χρονική στιγμή που το τρίγωνο ΑΔΓ έχει μέγιστο εμβαδό.

μονάδες 6

Β4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή που το τρίγωνο ΑΔΓ έχει εμβαδό $5\,cm^2$.

μονάδες 7

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, \pi]$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)ημx - f(x)συνx = f(x)ημx$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x \cdot ημx,\ x \in [0, \pi]$.

μονάδες 5

Γ2. α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $[0, \pi]$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = α$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

μονάδες 5+3+3

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot x + 2020$ και να βρεθεί η εξίσωση της.

μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 0$.

μονάδες 4

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$\left| f(x) - f(y) - x^2ημ\frac{1}{x} + y^2ημ\frac{1}{y} \right| \le (x - y)^{2020}$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$, $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$ και η συνάρτηση

$g(x) = \begin{cases} f(x) &, x > 0 \\ 0 &, x = 0 \end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2ημ\frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ότι ο άξονας x΄x είναι η εφαπτομένη της C_g στην αρχή των αξόνων.

μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι ο άξονας x΄x έχει με την C_g άπειρα κοινά σημεία.

μονάδες 3

Δ4. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\left[\frac{2}{\pi},+\infty\right)$.

μονάδες 6

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{2021\pi},\frac{1}{2020\pi}\right)$ τέτοιο ώστε $\sigma\varphi\frac{1}{\xi}=2\xi$.

μονάδες 6

Καλή τύχη!