Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

2021 - 2022

Αντώνης Βαλέργας **Αποστόλης Κακαβάς**

Στέλιος Μιχαήλογλου **Άγγελος Μπλιάς**

Δημήτρης Πατσιμάς **Βαγγέλης Ραμαντάνης**

Νίκος Σαμπάνης **Βαγγέλης Τόλης**

Νίκος Τούντας

11ο Διαγώνισμα

11-5 -2022

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

$$«\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g(x)dx».$$

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,4]$, τότε ισχύει ότι $\int_1^4 f(x)dx < \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$.

β) Αν η μη μηδενική συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, $\alpha \neq \beta$, τότε η f έχει ετερόσημες τιμές.

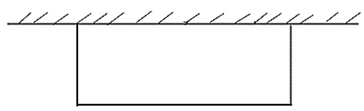
γ) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [2,3]$, τότε η απόσταση του σημείου $A(2,f(2))$ από τον x΄x είναι μικρότερη από την απόσταση του σημείου $B(3,f(3))$ από τον x΄x.

δ) Μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1 − 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1 x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

ε) Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α, β), τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο.

μονάδες 10

Θέμα Β



Με σύρμα μήκους 200 μέτρων περιφράσουμε τις τρείς πλευρές του παραπάνω ορθογωνίου. (Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος).
Ας υποθέσουμε ότι το μέρος του τοίχου που βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο είναι x μέτρα.

Β1. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου σε συνάρτηση με το μήκος x δίνεται από την συνάρτηση

$$E(x) = \frac{200x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 200.$$

μονάδες 6

Β2. Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν παίρνει την μέγιστη τιμή του και ποια είναι αυτή.

μονάδες 6

Β3. Αν το μήκος του τοίχου που βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο αυξάνεται με ρυθμό 0,2 μέτρα το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τις χρονικές στιγμές που είναι ίσο με 3750 τετραγωνικά μέτρα.

μονάδες 8

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2E(x) - 198} - 1}{\etaμ(x^2 - 1)}$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+3x^2+2x, x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\rho\in(-1,0)$ τέτοιος, ώστε $e^{\rho}+6\rho+2=0$.

μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x)\geq 3\rho^2-4\rho-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου ρ ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

μονάδες 5

Γ3. Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=\dfrac{2022}{403}$.

μονάδες 6

Γ4. Έστω ένα σημείο $M(x(t),y(t))$, όπου t ο χρόνος όπου το M διατρέχει τη γραφική παράσταση της f με $x'(t)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 με $x(t_0)\in(-1,0)$ ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M, ως προς το χρόνο, να είναι μηδέν.

μονάδες 4

Γ5. Να δείξετε ότι: $\int_0^1 f(x)dx>\dfrac{5}{2}$.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{g(x)}{g(x)-1}$, $x\neq 0$ και $g(\mathbb{R})=[1,+\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$.

μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x)>1$ για κάθε $x\neq 0$.

μονάδες 5

Δ3. Αν η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε μοναδική θέση να αποδείξετε ότι δεν είναι 1-1.

μονάδες 5

Δ4. Αν η g είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$:

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Αν ισχύει ότι $\int_{f(2)}^{5/4} f(x)dx=0$ και $\int_1^2 g(t)dt<\dfrac{15}{4}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)-{x_0}^2=1-\int_1^2 g(t)dt$.

μονάδες $5+6=11$

Ευχόμαστε Επιτυχία!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο**,** όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\geq f(x_0)$, για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=x^2$ και $g(x)=x,\ x\in[1,3]$.

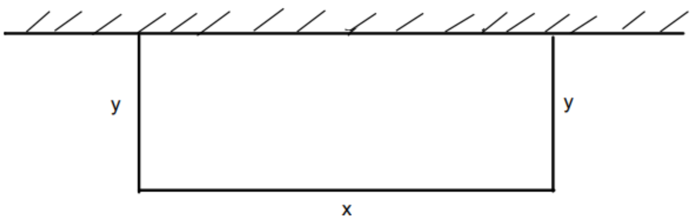
$$\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx \Leftrightarrow \int_1^3 x^2\cdot xdx=\int_1^3 x^2dx\cdot\int_1^3 xdx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^3 x^3dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 \Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3=\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{81}{4}-\frac{1}{4}=\frac{26}{3}\cdot 4 \Leftrightarrow 20=\frac{104}{3} \text{ άτοπο.}$$

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

Θέμα Β

Β1.



Έστω y η άλλη πλευρά τότε $2y+x=200 \Leftrightarrow y=\dfrac{200-x}{2}$, $0<x<200$.

Το εμβαδόν είναι $E=xy$ οπότε $E(x)=x\dfrac{200-x}{2}=\dfrac{200x-x^2}{2}$, $0<x<200$.

Β2. Ε συνεχής στο $(0,200)$ και $E'(x)=100-x$.

$E'(x)=0 \Leftrightarrow 100-x=0 \Leftrightarrow x=100$ και

$E'(x)>0 \Leftrightarrow 100-x>0 \Leftrightarrow x<100$

Άρα η Ε παρουσιάζει μέγιστο για x=100 το Ε(100)=5000m^2

Β3. Έχουμε $x'(t)=0,2m/s$.

$E(x)=3750 \Leftrightarrow \dfrac{200x-x^2}{2}=3750 \Leftrightarrow x^2-200x+7500=0$

$\Delta=200^2-4\cdot 7500=40000-30000=10000$

$x_{1,2}=\dfrac{200\pm 100}{2} \Leftrightarrow x_1=150 \; , \; x_2=50$

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 είναι $x_1=x(t_1)=150$ m.

$E(t)=\dfrac{200x(t)-x^2(t)}{2}$ τότε $E'(t)=\left(\dfrac{200x(t)-x^2(t)}{2}\right)'=100x'(t)-x(t)\cdot x'(t)$

και για $t=t_1$: $E'(t_1)=100x'(t_1)-x(t_1)\cdot x'(t_1)=100\cdot 0,2-150\cdot 0,2=-10m^2\ /\ s$

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 είναι $x_2=x(t_2)=50$ m.

Για $t=t_2$: $E'(t_2)=100x'(t_2)-x(t_2)\cdot x'(t_2)=100\cdot 0,2-50\cdot 0,2=10m^2\ /\ s$

B4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2E(x)-198}-1}{\eta\mu(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{\sqrt{200x-x^2-198}-1}{x^2-1}}{\dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{x^2-1}}=\dfrac{99}{2}$ γιατί:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{200x-x^2-198}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{200x-x^2-198}-1\right)\left(\sqrt{200x-x^2-198}+1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{200x-x^2-198}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{200x-x^2-198-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{200x-x^2-198}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\left(x^2+200x+199\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{200x-x^2-198}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x-199)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{200x-x^2-198}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-199)}{(x+1)\left(\sqrt{200x-x^2-198}+1\right)}=\frac{198}{4}=\frac{99}{2}$$

και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{x^2-1}\overset{u=x^2-1}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

Θέμα Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x+6x+2, x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(-1)=\dfrac{1}{e}-4<0$ και $h(0)=3>0$.

Οπότε $h(-1)h(0)<0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(-1,0)$: $h(\rho)=0 \Leftrightarrow e^\rho+6\rho+2=0$.

Επίσης, η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=e^x+6>0$,οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς η ρίζα ρ είναι μοναδική.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+6x+2=h(x)$ και η h έχει μοναδική ρίζα τη $x=\rho$.

Επομένως, για $x<\rho \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)<h(\rho)=0 \Leftrightarrow f'(x)<0$,οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\rho]$. Ενώ για $x>\rho \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(\rho)=0 \Leftrightarrow f'(x)>0$,οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\rho,+\infty)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=\rho$ το $f(\rho)=e^\rho+3\rho^2+2\rho$.Όμως από το Γ1 είναι

$e^\rho+6\rho+2=0 \Leftrightarrow e^\rho=-6\rho-2$

Άρα $f(\rho)=-6\rho-2+3\rho^2+2\rho \Leftrightarrow f(\rho)=3\rho^2-4\rho-2$. Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(x)\ge f(\rho) \Leftrightarrow f(x)\ge 3\rho^2-4\rho-2$.

Γ3. Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x + 3x^2 + 2x\right) = +\infty$ γιατί $\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2+2x\right) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
Ενώ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x + 3x^2 + 2x\right) = +\infty$ γιατί $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2+2x\right) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$.Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty,\rho]$ με σύνολο τιμών $f(A_1) = \left[f(\rho), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left[3\rho^2 - 4\rho - 2, +\infty\right)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [\rho, +\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A_2) = \left[f(\rho), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[3\rho^2 - 4\rho - 2, +\infty\right)$.
Επομένως , το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[3\rho^2 - 4\rho - 2, +\infty\right)$

Είναι $-1 < \rho < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3\rho^2 < 3 \\ 0 < -4\rho < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 3\rho^2 - 4\rho < 7 \Leftrightarrow -2 < 3\rho^2 - 4\rho - 2 < 5$ και $\frac{2022}{403} > 5$.

- Οπότε $\frac{2022}{403} \in f(A_1)$ άρα υπάρχει $\rho_1 \in (-\infty, \rho)$ τέτοιος ,ώστε $f(\rho_1) = \frac{2022}{403}$ και είναι μοναδικός αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1.
- και $\frac{2022}{403} \in f(A_2)$ άρα υπάρχει $\rho_2 \in (\rho, +\infty)$ τέτοιος ,ώστε $f(\rho_2) = \frac{2022}{403}$ και είναι μοναδικός αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2.

Επομένως, η εξίσωση $f(x) = \frac{2022}{403}$ έχει ακριβώς δυο ρίζες της ρ_1, ρ_2

Γ4. Είναι $y(t) = e^{x(t)} + 3x^2(t) + 2x(t)$ οπότε $y'(t) = e^{x(t)}x'(t) + 6x(t)x'(t) + 2x'(t) \Leftrightarrow$
$y'(t) = x'(t)\left(e^{x(t)} + 6x(t) + 2\right)$. Αν $t = t_0$ η στιγμή που το Μ διέρχεται από το σημείο $(\rho, f(\rho))$ τότε $x(t_0) = \rho \in (-1,0)$ και αφού $e^\rho + 6\rho + 2 = 0$ τότε $e^{x(t_0)} + 6x(t_0) + 2 = 0$ οπότε $y'(t_0) = x'(t_0)\cdot 0 = 0$

Γ5. Η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x^2 + 2x$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + 6x + 2$ και $f''(x) = e^x + 6 > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Επίσης $f(0) = 1$ και $f'(0) = 3$, οπότε η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$ είναι
$y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y - 1 = 3x \Leftrightarrow y = 3x + 1$. Θα είναι $f(x) \geq x + 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, συνεπώς $\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 (3x+1)dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^1 + [x]_0^1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx > \frac{5}{2}$

Θέμα Δ

Δ1.Επειδή $f(x) = \frac{g(x)}{g(x)-1}$, $x \neq 0$ πρέπει $g(x) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 1$ για κάθε $x \neq 0$ άρα $g(0) = 1$,γιατί $g(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$. Άρα $g(x) \geq 1 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο $x_0 = 0$ το $g(0) = 1$.

Δ2. Για $x \neq 0$: $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{g(x)}{g(x)-1} \Leftrightarrow yg(x) - y = g(x) \Leftrightarrow g(x)(y-1) = y \quad (1)$

Αν $y = 1$: $(1) \Leftrightarrow 0 = 1$ αδύνατη

Αν $y > 1$: $g(x) = \frac{y}{y-1}$ και επειδή $g(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{y}{y-1} \geq 1 \overset{y>1}{\Leftrightarrow} y \geq y - 1 \Leftrightarrow 0 \geq -1$ ισχύει

Αν $y < 1$: $g(x) = \frac{y}{y-1}$ και επειδή $g(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{y}{y-1} \geq 1 \overset{y<1}{\Leftrightarrow} y \leq y - 1 \Leftrightarrow 0 \leq -1$ αδύνατη.

Άρα $f(x)>1$ για κάθε $x\neq 0$.

Δ3. Είναι $g(x)\geq g(0)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=0 , άρα υπάρχουν αριθμοί $x_1,x_2\in\mathbb{R}^*$ με $x_1<0<x_2$ τέτοιοι ώστε $g(x_1)>1$ και $g(x_2)>1$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:
Αν $g(x_1)=g(x_2)$ τότε προφανώς η g δεν είναι 1-1.
Αν $g(x_1)>g(x_2)>g(0)=1$ επειδή f συνεχής στο $[x_1,0]$, από ΘΕΤ θα υπάρχει $x_3\in(x_1,0)$ τέτοιο ώστε $g(x_3)=g(x_2)$ και η g δεν είναι 1-1.
Αν $g(x_2)>g(x_1)>g(0)=1$ τότε επειδή f συνεχής στο $[0,x_2]$, από ΘΕΤ θα υπάρχει $x_4\in(0,x_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_4)=g(x_1)$ και η g δεν είναι 1-1.

Δ4. α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{g'(x)(g(x)-1)-g(x)g'(x)}{(g(x)-1)^2}=\frac{\cancel{g(x)g'(x)}-g'(x)-\cancel{g(x)g'(x)}}{(g(x)-1)^2}=-\frac{g'(x)}{(g(x)-1)^2}$$

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο μηδέν, το οποίοι είναι εσωτερικό σημείο και η g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό άρα από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $g'(0)=0$.

Για $x<0\overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow}g'(x)<g'(0)=0$ και για $x>0\overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow}g'(x)>g'(0)=0$

Είναι $(g(x)-1)^2>0$ για κάθε $x\neq 0$ άρα $f\nearrow(-\infty,0)$ και $f\searrow(0,+\infty)$.

β) $f(x)-x^2=1-\int_1^2 g(t)dt \Leftrightarrow f(x)-x^2+\int_1^2 g(t)dt-1=0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-x^2+\int_1^2 g(t)dt-1$, $x\in[1,2]$

Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- $h(1)=f(1)-1+\int_1^2 g(t)dt-1>0$ γιατί $f(1)>1\Leftrightarrow f(1)-1>0$, $g(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα μόνον για $x=0$ άρα $\int_1^2 g(t)dt>\int_1^2 1\,dt \Leftrightarrow \int_1^2 g(t)dt-1>0$.
- $h(2)=f(2)-4+\int_1^2 g(t)dt-1$ γιατί $f(x)>1, \forall x\in\mathbb{R}^*$.

  Αν $1<f(2)<\frac{5}{4}$ τότε $\int_{f(2)}^{5/4} f(x)dx>0$ άτοπο.

  Αν $f(2)>\frac{5}{4}$ τότε $\int_{f(2)}^{5/4} f(x)dx<0$ άτοπο.

  Άρα $f(2)=\frac{5}{4}$ και έχουμε ότι:

  $$h(2)=\frac{5}{4}-4+\int_1^2 g(t)dt-1=\int_1^2 g(t)dt-1-\frac{11}{4}=\int_1^2 g(t)dt-\frac{15}{4}<0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0(1,2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.