61η Άσκηση

Η εκθετική συνάρτηση στο σχολικό βιβλίο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $a(x)=f(-x)+1$ και $b(x)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$ αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφή τους.

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

3. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τη γραφική παράσταση της $y=\dfrac{1}{x}$ ακριβώς σ΄ ένα σημείο.

4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $c(x)=-x^2-x$.

5. Αν μια συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\alpha$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)g(x)-e^{\alpha}g(\alpha)}{x-\alpha}=f(\alpha)\big(g(\alpha)+g'(\alpha)\big)\ .$$

6. Αν $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι $e^{\alpha}(\beta-\alpha)<e^{\beta}-e^{\alpha}<e^{\beta}(\beta-\alpha)$.

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

α) $f(x)>x+1$ **β)** $f(x)>\dfrac{x^2}{2}+x+1$

8. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=2f(x-\alpha)-x^2$ έχει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στη παραβολή $y=-x^2+2$.

9. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\alpha, & x\le 0\\ f(\beta x), & x>0\end{cases}$, να είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=0$.

10. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $A(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \big(1-f(-x)\big)\ln x, & x\in(0,1]\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

11. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή, ενώ η $d(x)=\ln x$ είναι κοίλη.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και της C_d στο $B(1,0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι: **i.** $e^x\ge x+1,\ x\in\mathbb{R}$ **ii.** $\ln x\le x-1,\ x\in(0,+\infty)$.

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

δ) Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

12. α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $B(x)=f(x)-\lambda x,\ \lambda>0$.

β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει $f(x) \geq \lambda x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Για τη τιμή του λ που θα βρείτε παραπάνω, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται στη C_f .

13. Ο πληθυσμός $N(t)$, σε εκατομμύρια, μιας κοινωνίας βακτηριδίων, αυξάνεται με ρυθμό

$N'(t) = \frac{1}{20} f\left(\frac{t}{20}\right)$ ανά λεπτό. Να βρείτε την αύξηση του πληθυσμού στα πρώτα 60 λεπτά.

14. Η θερμοκρασία T ενός σώματος, που περιβάλλεται από ένα ψυκτικό υγρό, ελαττώνεται με ρυθμό $-\kappa a f(-kt)$, όπου α, κ είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος. Η αρχική θερμοκρασία $T(0)$ του σώματος είναι $T_0 + \alpha$, όπου T_0 η θερμοκρασία του υγρού η οποία με κατάλληλο μηχάνημα διατηρείται σταθερή. Να βρείτε τη θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t.

15. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\Gamma(x) = f(-x^2)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι:

α) $1 - x^2 \leq f(-x^2) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και

β) $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 f(-x^2)dx \leq 1$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Askisopolis

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Λύση

1. $a(x)=f(-x)+1=e^{-x}+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $a'(x)=-e^{-x}<0\Rightarrow a\searrow\mathbb{R}\Rightarrow a\ 1-1$ και αντιστρέφεται.

$\lim\limits_{x\to-\infty}a(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+1\right)=+\infty+1=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}a(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+1\right)=0+1=1$.

Η a είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το

$a(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}a(x),\lim\limits_{x\to-\infty}a(x)\right)=(1,+\infty)$. Άρα $D_{a^{-1}}=(1,+\infty)$.

$a(x)=y\Leftrightarrow e^{-x}+1=y\Leftrightarrow e^{-x}=y-1\Leftrightarrow -x=\ln(y-1)\Leftrightarrow x=-\ln(y-1)$.

Άρα $a^{-1}(y)=-\ln(y-1),\ y>1$, οπότε $a^{-1}(x)=-\ln(x-1),\ x>1$.

$b(x)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}=\dfrac{e^x-1}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $b'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^x\left(\cancel{e^x}+1-\cancel{e^x}+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0\Rightarrow b\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow b\ 1-1$ και αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}b(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to0}}{\overset{e^x=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u-1}{u+1}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}b(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{e^x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u-1}{u+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{u}=1$

Η b είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε έχει σύνολο τιμών το

$b(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}b(x),\lim\limits_{x\to+\infty}b(x)\right)=(-1,1)$. Άρα $D_{b^{-1}}=(-1,1)$.

$b(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^xy+y=e^x-1\Leftrightarrow e^xy-e^x=-y-1\Leftrightarrow e^x(y-1)=-y-1\overset{y\in(-1,1)}{\Leftrightarrow}$

$e^x=\dfrac{-y-1}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{y+1}{1-y}$. Άρα $b^{-1}(y)=\ln\dfrac{y+1}{1-y},\ y\in(-1,1)$ οπότε $b^{-1}(x)=\ln\dfrac{x+1}{1-x},\ x\in(-1,1)$.

2. Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι: $\dfrac{f(x)}{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-2}=0\Leftrightarrow(x-2)e^x+(x-1)\ln x=0$

Έστω $t(x)=(x-2)e^x+(x-1)\ln x,\ x\in[1,2]$.

Η t είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $t(1)=-e<0,\ t(2)=\ln2>0$, δηλαδή $t(1)t(2)<0$ και επειδή η t είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $t(x)=0\Leftrightarrow(x-2)e^x-(x-1)\ln x=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$.

3. Αρκεί η εξίσωση $f(x)=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow e^x-\dfrac{1}{x}=0$ να έχει ακριβώς μία ρίζα .

Έστω $z(x)=e^x-\dfrac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$.

Η z είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $z'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$, οπότε η z είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}z(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right)=0-0=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}z(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty-0=+\infty$.

Askisopolis

$\lim\limits_{x\to 0^-} z(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right)=1-(-\infty)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} z(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right)=1-(+\infty)=-\infty$.

Η z είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $z(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to -\infty} z(x),\lim\limits_{x\to 0^-} z(x)\right)=(0,+\infty)$.

Επειδή $0\notin z(\Delta_1)$, η εξίσωση $z(x)=0$ είναι αδύνατη στο Δ_1 .

Η z είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=(0,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $z(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} z(x),\lim\limits_{x\to +\infty} z(x)\right)=\mathbb{R}$.

Επειδή $0\in z(\Delta_2)$, η εξίσωση $z(x)=0$ είναι ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2 .

4. Είναι $f'(x)=e^x$, $f'(0)=1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ είναι η ευθεία ε: $y-1=x \Leftrightarrow y=x+1$

Θα αναζητήσουμε σημείο $(x_2,c(x_2))$ της C_c στο οποίο $c'(x_2)=1$.

Είναι $c'(x)=-2x-1$ και $c'(x_2)=1\Leftrightarrow -2x_2-1=1\Leftrightarrow x_2=-1$. Η εφαπτομένη της C_c στο $x_2=-1$ έχει εξίσωση $y-c(-1)=x+1\Leftrightarrow y=x+1$, δηλαδή είναι η ε.

5. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\alpha$ ισχύει ότι $g'(\alpha)=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$.

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)g(x)-e^{\alpha}g(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(\alpha)+f(x)g(\alpha)-e^{\alpha}g(\alpha)}{x-\alpha}=$$

$$\lim_{x\to\alpha}\left(e^x\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}+g(\alpha)\frac{e^x-e^{\alpha}}{x-\alpha}\right)=e^{\alpha}g'(\alpha)+g(\alpha)f'(\alpha)=$$

$$e^{\alpha}g'(\alpha)+g(\alpha)e^{\alpha}=e^{\alpha}\left(g(\alpha)+g'(\alpha)\right)=f(\alpha)\left(g(\alpha)+g'(\alpha)\right)$$

6. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[\alpha,\beta]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{\xi}=\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}$.

Είναι $\alpha<\xi<\beta\Leftrightarrow e^{\alpha}<e^{\xi}<e^{\beta}\Leftrightarrow e^{\alpha}<\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}<e^{\beta}\Leftrightarrow$ $e^{\alpha}(\beta-\alpha)<e^{\beta}-e^{\alpha}<e^{\alpha}(\beta-\alpha)$

7. **α)** $f(x)>x+1\Leftrightarrow e^x-x-1>0$.

Έστω $m(x)=e^x-x-1,\ x\ge 0$. Είναι $m'(x)=e^x-1>0$ για κάθε $x>0$ και επειδή η m είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για $x>0\overset{m\nearrow}{\Leftrightarrow}m(x)>m(0)\Leftrightarrow e^x-x-1>0$

β) $f(x)>\dfrac{x^2}{2}+x+1\Leftrightarrow e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1>0$.

Έστω $k(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1,\ x\ge 0$. Είναι $k'(x)=e^x-x-1>0$ για κάθε $x>0$ και επειδή η k είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για $x>0\overset{k\nearrow}{\Leftrightarrow}k(x)>k(0)\Leftrightarrow e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1>0$

Askisopolis

8. $h(x)=2f(x-\alpha)-x^2=2e^{x-\alpha}-x^2,\ x\in\mathbb{R}$

Είναι $h(x)=2e^{x-\alpha}-2x$ και $h''(x)=2e^{x-\alpha}-2$.

$h''(x)\ge 0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2\ge 0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}\ge 2\Leftrightarrow e^{x-\alpha}\ge 1\Leftrightarrow x-\alpha\ge 0\Leftrightarrow x\ge\alpha$.

Για κάθε $x<\alpha$ είναι $h''(x)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$.

Για κάθε $x>\alpha$ είναι $h''(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$.

Η h έχει σημείο καμπής το σημείο $\Theta(\alpha,h(\alpha))$ ή $\Theta(\alpha,2-\alpha^2)$.

Επειδή οι συντεταγμένες του Θ επαληθεύουν την $y=-x^2+2$ το σημείο αυτό βρίσκεται στη παραβολή $y=-x^2+2$.

9. $\varphi(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\alpha, & x\le 0\\ e^{\beta x}, & x>0\end{cases}$.

Για να είναι η φ παραγωγίσιμη στο $x_1=0$ θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό, δηλαδή:

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^-}\varphi(x)=\varphi(0)\Leftrightarrow \lim_{x\to0^+}\left(e^{\beta x}\right)=\lim_{x\to0^-}(\eta\mu x+\alpha)=\alpha\Leftrightarrow 1=\alpha$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\eta\mu x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=1,\ \lim_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\beta x}-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\beta e^{\beta x}}{1}=\beta\ .$$

Για να είναι η φ παραγωγίσιμη στο $x_1=0$, πρέπει

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\Leftrightarrow 1=\beta$$

10. $A(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ (1-e^{-x})\ln x, & x\in(0,1]\end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}A(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1-e^{-x})\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{1-e^{-x}}{x}\cdot(x\ln x)\right]$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-e^{-x}}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{-x}}{1}=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to0^+}A(x)=1\cdot0=0=A(0)$, άρα η A είναι συνεχής στο $x=0$.

11. α) Είναι $f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x>0\Rightarrow f\cup\mathbb{R}$.

$d'(x)=\frac{1}{x},\ \ d''(x)=-\frac{1}{x^2}<0\Rightarrow d\cap(0,+\infty)$

β) Από το σκέλος 4 η ευθεία ε: $y=x+1$ είναι εφαπτομένη της C_f στο A.

Η εφαπτομένη της C_d στο $B(1,0)$ είναι η $\varepsilon_1: y=d'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=x-1$

γ) i. Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από την ε, δηλαδή $e^x\ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής, δηλαδή για $x=0$.

ii. Επειδή η d είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από την ε_1, δηλαδή $\ln x\le x-1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής, δηλαδή για $x=1$.

δ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $e^x\ge x+1>x-1\ge\ln x$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

Askisopolis

12. α) $B(x)=f(x)-\lambda x=e^x-\lambda x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $B'(x)=e^x-\lambda$.

$B'(x)\ge 0\Leftrightarrow e^x-\lambda\ge 0\Leftrightarrow e^x\ge\lambda\Leftrightarrow x\ge\ln\lambda$.

Για κάθε $x\in(-\infty,\ln\lambda)$ είναι $B'(x)<0$ και επειδή η B είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Για κάθε $x\in(\ln\lambda,+\infty)$ είναι $B'(x)>0$ και επειδή η B είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η B έχει ελάχιστο το $B(\ln\lambda)=e^{\ln\lambda}-\lambda\ln\lambda=\lambda-\lambda\ln\lambda=\lambda(1-\ln\lambda)$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\ge\lambda x\Leftrightarrow f(x)-\lambda x\ge 0\Leftrightarrow B(x)\ge 0$. Όμως $B(x)\ge B(\lambda)$, οπότε αρκεί

$B(\lambda)\ge 0\Leftrightarrow\lambda(1-\ln\lambda)\ge 0\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}1-\ln\lambda\ge 0\Leftrightarrow\ln\lambda\le 1\Leftrightarrow\lambda\le e$, άρα $\lambda_{max}=e$.

γ) Για $\lambda=e$, είναι $y=ex$. Επειδή $f'(1)=e=\lambda$, θεωρούμε την εφαπτομένη της f στο $x=1$. Είναι η ευθεία $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-e=ex-e\Leftrightarrow y=ex$

13. $N'(t)=\dfrac{1}{20}e^{t/20}\Leftrightarrow N'(t)=\left(e^{t/20}\right)'\Leftrightarrow N(t)=e^{t/20}+c,\ c\in\mathbb{R}$

Η αύξηση του πληθυσμού στα πρώτα 60 λεπτά είναι:

$N(60)-N(0)=e^{60/20}+\cancel{c}-e^0-\cancel{c}=\left(e^3-1\right)$ εκατομμύρια βακτηρίδια.

14. Είναι $T'(t)=-\kappa\alpha f(-kt)=-\kappa\alpha e^{-kt}\Leftrightarrow T'(t)=\left(\alpha e^{-kt}\right)'\Leftrightarrow T(t)=\alpha e^{-kt}+c',\ c'\in\mathbb{R}$.

Είναι $T(0)=T_0+\alpha\Leftrightarrow\alpha+c'=T_0+\alpha\Leftrightarrow c'=T_0$, οπότε $T(t)=\alpha e^{-kt}+T_0$

15. $\Gamma(x)=f\left(-x^2\right)=e^{-x^2},\ x\ge 0$.

Είναι $\Gamma'(x)=-2xe^{-x^2}<0\Rightarrow\Gamma\searrow[0,+\infty)$

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\ge x+1$, οπότε αντικαθιστώντας το x με $-x^2$ προκύπτει:

$e^{-x^2}\ge -x^2+1\ \Leftrightarrow\ 1-x^2\le f\left(-x^2\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε και για $x\in[0,1]$.

Για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $-x^2\le 0\Leftrightarrow e^{-x^2}\le e^0=1$, οπότε τελικά

$1-x^2\le f\left(-x^2\right)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$.

β) Είναι $1-x^2\le f\left(-x^2\right)\le 1\Rightarrow\int_0^1\left(1-x^2\right)dx\le\int_0^1 f\left(-x^2\right)dx\le\int_0^1 dx\Leftrightarrow$

$\left[x-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{3}\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1\Leftrightarrow\ \dfrac{2}{3}\le\int_0^1 f\left(-x^2\right)dx\le 1$.

Askisopolis