15η Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu^3x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^3x\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{2}\eta\mu 2x$.

β) Να δείξετε ότι η παράσταση $4f^2\left(\frac{\pi-x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu(\pi-x)\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)+8f^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)$ έχει σταθερή τιμή.

γ) Να δείξετε ότι $f^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+f^2\left(\frac{\pi}{4}-y\right)+2f(x)f(y)\le\frac{1}{2}$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)-2|+3\eta\mu^3x\sigma\upsilon\nu x=1-3\sigma\upsilon\nu^3x\eta\mu x$

ε) Να δείξετε ότι $\frac{2f(x)}{1+2f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\varepsilon\varphi x$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x)-2\sigma\upsilon\nu x+2f\left(\frac{x}{2}\right)-1=0$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) $f(x)=\eta\mu^3x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^3x\eta\mu x=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\eta\mu 2x$

β) Είναι $f\left(\frac{\pi-x}{2}\right)=\frac{1}{2}\eta\mu\left(2\frac{\pi-x}{2}\right)=\frac{1}{2}\eta\mu(\pi-x)\overset{2o}{=}\frac{1}{2}\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(\pi-x)\overset{2o}{=}-\sigma\upsilon\nu x$,

$\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)\overset{4o}{=}\sigma\upsilon\nu x$ και $f\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)=\frac{1}{2}\eta\mu\left(\cancel{2}\frac{\pi-2x}{\cancel{4}^{2}}\right)=\frac{1}{2}\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x$

$4f^2\left(\frac{\pi-x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu(\pi-x)\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)+8f^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)=4\left(\frac{1}{2}\eta\mu x\right)^2-\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+8\left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x\right)^2=$

$\cancel{4}\frac{1}{\cancel{4}}\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x+\cancel{8}^{2}\frac{1}{\cancel{4}}\sigma\upsilon\nu^2x=\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x+2\sigma\upsilon\nu^2x=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1=$ σταθερή

γ) $f^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+f^2\left(\frac{\pi}{4}-y\right)+2f(x)f(y)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\frac{1}{4}\eta\mu^2\left[2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]+\frac{1}{4}\eta\mu^2\left[2\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right]+2\frac{1}{2}\eta\mu 2x\cdot\frac{1}{2}\eta\mu 2y\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)+2\eta\mu 2x\eta\mu 2y\le 2\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2 2x+\sigma\upsilon\nu^2 2y+2\eta\mu 2x\eta\mu 2y\le 2\Leftrightarrow$

$\cancel{1}-\eta\mu^2 2x+\cancel{1}-\eta\mu^2 2y+2\eta\mu 2x\eta\mu 2y\le\cancel{2}\Leftrightarrow$

$0\le\eta\mu^2 2x+\eta\mu^2 2y-2\eta\mu 2x\eta\mu 2y\Leftrightarrow$

$\left(\eta\mu 2x-\eta\mu 2y\right)^2\ge 0$ ισχύει

δ) Είναι $f(x)=\frac{1}{2}\eta\mu 2x\le\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)-2<0$ οπότε:

$\left|f(x)-2\right|+3\eta\mu^3x\sigma\upsilon\nu x=1-3\sigma\upsilon\nu^3x\eta\mu x\Leftrightarrow 2-f(x)+3\eta\mu^3x\sigma\upsilon\nu x+3\sigma\upsilon\nu^3x\eta\mu x=1\Leftrightarrow$

$-f(x)+3f(x)=-1\Leftrightarrow 2f(x)=-1\Leftrightarrow 2\frac{1}{2}\eta\mu 2x=-1\Leftrightarrow\eta\mu 2x=-1\Leftrightarrow$

$2x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{3\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

ε) $\frac{2f(x)}{1+2f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{2\frac{1}{2}\eta\mu 2x}{1+2\frac{1}{2}\eta\mu 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x}=\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+2\sigma\upsilon\nu^2x-1}=$

$=\frac{\cancel{2}\eta\mu x\,\cancel{\sigma\upsilon\nu x}}{\cancel{2}\sigma\upsilon\nu^{\cancel{2}}x}=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\varepsilon\varphi x$

στ) $2f(x)-2\sigma\upsilon\nu x+2f\left(\frac{x}{2}\right)-1=0\Leftrightarrow 2\frac{1}{2}\eta\mu 2x-2\sigma\upsilon\nu x+2\frac{1}{2}\eta\mu\cancel{2}\frac{x}{\cancel{2}}-1=0\Leftrightarrow$

$2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-2\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-1=0\Leftrightarrow$ $2\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x-1)+(\eta\mu x-1)=0\Leftrightarrow(\eta\mu x-1)(2\sigma\upsilon\nu x+1)=0\Leftrightarrow$

$\left(\eta\mu x=1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$ ή

$$\left(2\sigma\upsilon\nu x+1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right)$$