38η Άσκηση

Έως αρχική συνάρτηση

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

- $2x^2f'(x)+x^3f''(x)+1=0$ για κάθε $x>0$,
- έχει ακρότατο στο σημείο $A\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

β) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο A και στη συνέχεια να δείξετε ότι $x^e \le e^x$ για κάθε $x>0$.

γ) Αν υπάρχει $\alpha>0$ για το οποίο ισχύει ότι $x^e \le \alpha^x$ για κάθε $x>0$ να δείξετε ότι $\alpha \ge e$.

δ) Να βρείτε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f έχει τη μικρότερη κλίση.

ε) Να βρείτε αρχική συνάρτηση F της f για την οποία να ισχύει ότι $F(1)=0$.

στ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, $F(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$ έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x>0$ είναι $f(x)=\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow xf(x)=\ln x \Leftrightarrow xf(x)-\ln x=0$.

Έστω $g(x)=xf(x)-\ln x,\ x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=f(x)+xf'(x)-\frac{1}{x}$.

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g''(x)=f'(x)+f'(x)+xf''(x)+\frac{1}{x^2}=2f'(x)+xf''(x)+\frac{1}{x^2}$.

Είναι $2x^2f'(x)+x^3f''(x)+1=0 \overset{:x^2}{\Leftrightarrow} 2f'(x)+xf''(x)=-\frac{1}{x^2}$, άρα

$g''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow g'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f διέρχεται από το σημείο $A\left(e,\frac{1}{e}\right)$, ισχύει ότι $f(e)=\frac{1}{e}$ και επειδή έχει ακρότατο στο Α από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(e)=0$. Τότε $g'(e)=f(e)+ef'(e)-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}-\frac{1}{e}=0$ άρα $c=0$ και $g'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$. Είναι $g(e)=ef(e)-\ln e=1-1=0 \Leftrightarrow c_1=0$ και $g(x)=0$ για κάθε $x>0$, οπότε $xf(x)-\ln x=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

β) Είναι $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\ge 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\le 1 \Leftrightarrow x\le e$.

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow(0,e]$ και για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow[e,+\infty)$.

Η f έχει μέγιστο στο Α, οπότε για κάθε $x>0$ είναι

$f(x)\le f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e} \Leftrightarrow e\ln x\le x \Leftrightarrow \ln x^e\le x \Leftrightarrow x^e\le e^x$

γ) $x^e\le\alpha^x \Leftrightarrow \ln x^e\le\ln\alpha^x \Leftrightarrow e\ln x\le x\ln\alpha \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}\le\frac{\ln\alpha}{e} \Leftrightarrow f(x)\le\frac{\ln\alpha}{e}$. Όμως $f(x)\le\frac{1}{e}$ οπότε αρκεί $\frac{1}{e}\le\frac{\ln\alpha}{e} \Leftrightarrow \ln\alpha\ge 1 \Leftrightarrow \alpha\ge e$.

δ) Η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο τυχαίο σημείο $M(x,f(x))$ είναι $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{\cancel{x}}x^{\cancel{2}}-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{\cancel{x}(-1-2+2\ln x)}{x^{\cancel{4}3}}=\frac{2\ln x-3}{x^3}.$$

$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}\ge 0 \Leftrightarrow 2\ln x-3\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\ge\frac{3}{2} \Leftrightarrow x\ge e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$.

Για κάθε $x\in(0,e\sqrt{e})$ είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f'\searrow(0,e\sqrt{e}]$ και για κάθε $x>e\sqrt{e}$ είναι $f''(x)>0 \Rightarrow f'\nearrow[e\sqrt{e},+\infty)$. Η f' έχει ελάχιστο για $x=e\sqrt{e}=e^{\frac{3}{2}}$. Είναι

$f(e\sqrt{e})=\frac{\frac{3}{2}}{e\sqrt{e}}=\frac{3}{2e\sqrt{e}}=\frac{3\sqrt{e}}{2e^2}$, οπότε η εφαπτομένη της C_f έχει τη μικρότερη κλίση στο σημείο

$B\left(e\sqrt{e},\dfrac{3\sqrt{e}}{2e^2}\right)$.

ε) Αν F αρχική της f στο $(0,+\infty)$ τότε

$$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow F'(x)=\ln x\cdot\frac{1}{x}=\ln x(\ln x)'\Leftrightarrow F'(x)=\left(\frac{1}{2}\ln^2 x\right)'\Leftrightarrow\ F(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+c',\ c'\in\mathbb{R}.$$

Είναι $F(1)=0\Leftrightarrow c'=0$ άρα $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln^2 x,\ x>0$.

στ) Αρκεί να έχει δύο ρίζες η εξίσωση

$$F(x)=f(x)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln^2 x=\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow x\ln^2 x=2\ln x\Leftrightarrow x\ln^2 x-2\ln x=0\Leftrightarrow\ln x(x\ln x-2)=0\Leftrightarrow$$

$\ln x=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x\ln x-2=0$.

Έστω $h(x)=x\ln x-2,\ x>0$. Είναι $h'(x)=\ln x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ είναι $h'(x)<0\Rightarrow h\searrow\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ και για κάθε $x>\dfrac{1}{e}$ είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=-2$,

$h\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e}-2=-\dfrac{1}{e}-2<0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x-2)=+\infty$.

Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$h(A_1)=\left(-\dfrac{1}{e}-2,-2\right)$. Επειδή $0\notin h(A_1)$ η $h(x)=0$ είναι αδύνατη στο A_1.

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$h(A_2)=\left(-\dfrac{1}{e}-2,+\infty\right)$. Επειδή $0\in h(A_2)$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in A_2$ τέτοιο ώστε $h(x_1)=0$.

Τελικά η εξίσωση $F(x)=f(x)$ έχει ρίζες το 1 και το x_1.