Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

7ο Διαγώνισμα

25 - 4 - 2020

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

μονάδες 7

Α2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα μιας συνάρτησης f ορισμένης σ' ένα διάστημα Δ;

μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Α και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Α ».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

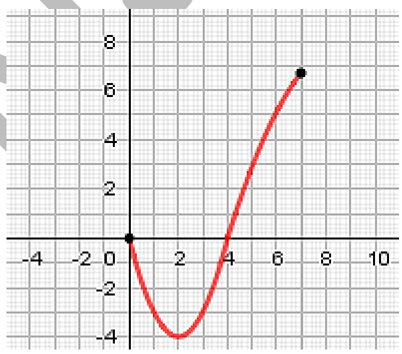
α) Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g ισχύουν $f(0)=4$, $f'(0)=3$, $f'(5)=6$, $g(0)=5$, $g'(0)=1$, $g'(4)=2$, τότε $(f\circ g)'(0)=(g\circ f)'(0)$.

β) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\beta)<f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)<0$.

γ) Αν $f(x)\le M$ για κάθε $x\in D_f$, τότε η f έχει μέγιστο το Μ.

Θέμα Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο διάστημα $[0,7]$.



Αν η C_f διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και ισχύουν οι σχέσεις $f(2)-f(0)=f(4)-f(2)=-3$ και $f(7)-f(4)=5$, τότε:

Β1. Να βρείτε τα $f(2),f(4),f(7)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=-10^{-2020}$.

μονάδες 6

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2,f(2))$.

μονάδες 3

Β3. Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της f, καθώς και το σύνολο τιμών της.

μονάδες 7

Β4 .Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{xe^{-x}}{f(x)+6}$. μονάδες 4

Β5. Έστω g παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[0,7]$ με $g'(x)=f'(x)+2x+1$ για κάθε $x\in[0,7]$ και $g(2)=5$.Να δείξετε ότι για την συνάρτηση h με $h(x)=g(x)-f(x)$ ισχύει ότι $h(x)=x^2+x+2$, $x\in[0,7]$

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x+\beta^x}$ με $\alpha>0$, $\beta>0$ και $\alpha\neq\beta$

Γ1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $A(\lambda,\lambda)$ με $\lambda\in(0,3)$.

μονάδες 5

Γ2. Αν υποθέσουμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία y = x και σε ένα ακόμη σημείο με τετμημένη $\mu>3$, να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

μονάδες 6

Γ3. Έστω $\alpha<\beta$.

α) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 5

β) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)\alpha^x+\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\beta^x=\left(\alpha^x+\beta^x\right)\ln x$ είναι αδύνατη.

μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει κρίσιμα σημεία..

μονάδες 3

Θέμα Δ

Δίνονται οι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, F για τις οποίες ισχύει :

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_o+h)-F(x_0-h)}{h}=2f(x_0)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x_0.
- $F(1)=0=F(2),\ F(3)=2=F(4),\ F'(5)=0$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{F(x)+1}{x-2}+\dfrac{F(x+2)+2}{x-1}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

μονάδες 5

Δ2..Να δείξετε ότι $F'(x)=f(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

μονάδες 4

Δ3. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,3]$.Να δείξετε ότι $f(3)<2<f(2)$.

μονάδες 4

Δ4. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

μονάδες 4+3

Δ5. Έστω $f(x)\le(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-5)^2$ όπου $\alpha,\beta\neq 5$ δύο από τις ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Δ4α. Να δείξετε ότι ο άξονας x΄x εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $A(\alpha,0),B(\beta,0)$ και $\Gamma(5,0)$.

μονάδες 5

Καλή τύχη!

7ο Διαγώνισμα - Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$,οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$, δηλαδή. $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Στο $x_0=0$ είναι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Α2. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

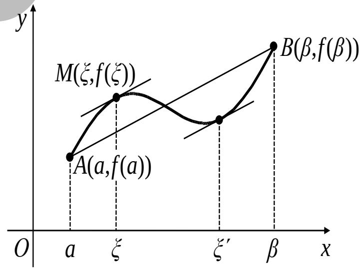
Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται και είναι συνεχής ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

Α3. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

Α4. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $A=\mathbb{R}^*$ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, όμως $f(x)<0$ για κάθε $x<0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, δηλαδή η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$.

Α5. α) Σ β) Σ γ) Λ

Θέμα Β

Β1. Επειδή η C_f διέρχεται από το $O(0,0)$, είναι $f(0)=0$. Αντικαθιστώντας στη σχέση $f(2)-f(0)=-3$ προκύπτει $f(2)=-3$ και αντικαθιστώντας στη σχέση $f(4)-f(2)=-3$ προκύπτει $f(4)=-6$. Αντικαθιστώντας στη σχέση $f(7)-f(4)=5$ προκύπτει ότι $f(7)=-1$. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ επειδή είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό και $f(2)\neq f(0)$. Επειδή $f(2)<-10^{-2020}<f(0)$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=-10^{-2020}$

Β2. Από την γραφική παράσταση της f' έχουμε ότι $f'(2)=-4$ και από το Β1 έχουμε ότι $f(2)=-3$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2,f(2))$

είναι $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y+3=-4(x-2) \Leftrightarrow y=-4x+5$

Β3. Για κάθε $x \in (0,4)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,4]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (4,7)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η fείναι συνεχής στο $[4,7]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η fέχει τοπικό μέγιστο το $f(0)=0$, ολικό ελάχιστο το $f(4)=-6$ και τοπικό μέγιστο το $f(7)=-1$.

Επειδή $f(0)>f(7)$, το $f(0)=0$ είναι ολικό μέγιστο της f.

Επειδή η fείναι συνεχής στο $A=[0,7]$, έχει ελάχιστο το $f(4)=-6$ και μέγιστο το $f(0)=0$, το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=[-6,0]$.

Β4. Είναι $f(x)>-6 \Leftrightarrow f(x)+6>0$ για κάθε $x \in [0,4)\cup(4,7]$ και $\lim\limits_{x\to 4}(f(x)+6)=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{f(x)+6} \underset{\substack{x\to 4 \Rightarrow \\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)+6=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{xe^{-x}}{f(x)+6}=\lim\limits_{x\to 4}\left[xe^{-x}\dfrac{1}{f(x)+6}\right]=4e^{-4}(+\infty)=+\infty$

Β5. $x\in[0,7]$ έχουμε ότι $g'(x)=f'(x)+2x+1 \Leftrightarrow g'(x)-f'(x)=\left(x^2+x\right)' \Leftrightarrow h'(x)=\left(x^2+x\right)' \overset{\substack{\text{ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ}\\ \text{ΘΜΤ}}}{\Leftrightarrow}$

$h(x)=x^2+x+c$. Για $x=2$ έχουμε: $h(2)=6+c \Leftrightarrow g(2)-f(2)=6+c \Leftrightarrow 8=6+c \Leftrightarrow c=2$

Οπότε: $h(2)=x^2+x+2,\ x\in[0,7]$

Θέμα Γ

Γ1. Αρκεί η εξίσωση $f(x)=x$ να έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,3)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x,\ x\in[0,3]$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(0)=f(0)=2,\ g(3)=f(3)-3=\dfrac{3\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}-3=\dfrac{\cancel{3\alpha^3}+\beta^3-\cancel{3\alpha^3}-3\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}=-\dfrac{2\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}<0$, δηλαδή $g(0)g(3)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\lambda\in(0,3)$ τέτοιο, ώστε $g(\lambda)=0 \Leftrightarrow f(\lambda)=\lambda$.

Γ2. Έστω ότι $f(\mu)=\mu,\ \mu>3$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=x_0$ είναι η ευθεία ε: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Η ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν: $0-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0) \Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ x\in[\lambda,\mu]$.

Η h είναι συνεχής στο $[\lambda,\mu]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (λ,μ) με $h'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$. Είναι $h(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{\lambda}=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1,\ h(\mu)=\dfrac{f(\mu)}{\mu}=\dfrac{\mu}{\mu}=1$, δηλαδή $h(\lambda)=h(\mu)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_0\in(\lambda,\mu)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0)=0 \Leftrightarrow$

$x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$.

Γ3. α) Είναι $f'(x)=\dfrac{\left(3\alpha^x\ln\alpha+\beta^x\ln\beta\right)\left(\alpha^x+\beta^x\right)-\left(3\alpha^x+\beta^x\right)\left(\alpha^x\ln\alpha+\beta^x\ln\beta\right)}{\left(\alpha^x+\beta^x\right)^2} \Leftrightarrow$

$f'(x)=\dfrac{2\alpha^x\beta^x\left(\ln\alpha-\ln\beta\right)}{\left(\alpha^x+\beta^x\right)^2}<0$ γιατί $\alpha<\beta$, άρα $f\searrow\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{\beta^x}\left(3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x+1\right)}{\cancel{\beta^x}\left(\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x+1\right)}=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{\alpha^x}\left(3+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^x\right)}{\cancel{\alpha^x}\left(1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^x\right)}=3$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(1,3)$.

β) $(x-1)\alpha^x+\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\beta^x=\left(\alpha^x+\beta^x\right)\ln x\Leftrightarrow x\alpha^x-\alpha^x+x\beta^x-\dfrac{1}{3}\beta^x=\alpha^x\ln x+\beta^x\ln x\Leftrightarrow$

$3x\alpha^x-3\alpha^x+3x\beta^x-\beta^x=3\alpha^x\ln x+3\beta^x\ln x\Leftrightarrow 3x\alpha^x+3x\beta^x-3\alpha^x\ln x-3\beta^x\ln x=3\alpha^x+\beta^x\Leftrightarrow$

$3\alpha^x(x-\ln x)+3\beta^x(x-\ln x)=3\alpha^x+\beta^x\Leftrightarrow 3(x-\ln x)\left(\alpha^x+\beta^x\right)=3\alpha^x+\beta^x\Leftrightarrow$

$3(x-\ln x)=\dfrac{3\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x+\beta^x}\Leftrightarrow f(x)=3(x-\ln x)$ (1)

Για κάθε $x>0$ είναι $\ln x\le x-1\Leftrightarrow x-\ln x\ge 1\Leftrightarrow 3(x-\ln x)\ge 3$ και $1<f(x)<3$, άρα η (1) είναι αδύνατη.

Γ4. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f δεν έχει κρίσιμα σημεία.

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x\neq 1,\ 2$ έχουμε

$\dfrac{F(x)+1}{x-2}+\dfrac{F(x+2)+2}{x-1}=0\Leftrightarrow (x-1)\left(F(x)+1\right)+(x-2)\left(F(x+2)+2\right)=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-1)\left(F(x)+1\right)+(x-2)\left(F(x+2)+2\right),\quad x\in[1,2]$.

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης $g(1)=-\left(F(3)+2\right)=-4<0,\ g(2)=F(2)+1>0$ οπότε

$g(1)\cdot g(2)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δηλαδή υπάρχει

$x_0\in(1,2)$ τέτοιος ώστε $g(x_0)=0$.

Δ2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_o+h)-F(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_o+h)-F(x_0)+F(x_0)-F(x_0-h)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{F(x_o+h)-F(x_0)}{h}-\dfrac{F(x_o-h)-F(x_0)}{h}\right)=2F'(x_0)$ αφού

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_o-h)-F(x_0)}{h}\underset{\substack{h\to 0,\ u\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=-h}{=}}\lim\dfrac{F(x_o+u)-F(x_0)}{-u}=-F'(x_0)$.

Επομένως $2F'(x_0)=2f(x_0)\Leftrightarrow F'(x_0)=f(x_0)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x_0 οπότε

$F'(x)=f(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Δ3. Για την F ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[2,3]$ άρα υπάρχει $\kappa\in(2,3)$ τέτοιος ώστε

$F'(k)=\dfrac{F(3)-F(2)}{3-2}\Leftrightarrow f(k)=2$ οπότε $2<k<3\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(2)>f(k)>f(3)\Leftrightarrow f(3)<2<f(2)$.

Δ4. α) Η F είναι συνεχής στο $[1,2]$,παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, $F(1)=0=F(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\alpha\in(1,2)$ τέτοιος ώστε $F'(\alpha)=0\Leftrightarrow f(\alpha)=0$.

Όμοια ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[3,4]$ οπότε υπάρχει $\beta\in(3,4)$ τέτοιος ώστε $F'(\beta)=0\Leftrightarrow f(\beta)=0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες. τις α,β και 5 αφού $F'(5)=0\Leftrightarrow f(5)=0$.

β) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$,παραγωγίσιμη στο (α,β) , $f(\alpha)=f(\beta)=0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $c_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f'(c_1)=0$.

Όμοια ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\beta,5]$ οπότε υπάρχει $c_2\in(\beta,5)$ τέτοιος ώστε $f'(c_2)=0$.

Η f' είναι συνεχής στο $[c_1,c_2]$,παραγωγίσιμη στο (c_1,c_2) , $f(\alpha)=f(\beta)=0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $c_0\in(c_1,c_2)$ τέτοιος ώστε $f''(c_0)=0$.

Δ5. Έχουμε $f(x)\le(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-5)^2\Leftrightarrow f(x)-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-5)^2\le 0$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-5)^2$.

Με κατάλληλη αντικατάσταση έχουμε. $h(\alpha)=h(\beta)=h(5)=0$ οπότε η σχέση (1) ισοδυναμεί με τις σχέσεις $h(x)\le h(\alpha),h(x)\le h(\beta)$ και $h(x)\le h(5)$.

Επομένως η h έχει τρεις θέσεις μεγίστου στα $\alpha,\beta,5\in\mathbb{R}$,είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat οπότε

$h'(\alpha)=h'(\beta)=h'(5)=0$. Όμως

$$h'(x)=f'(x)-2(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-5)^2-2(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-5)^2-2(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-5)$$

οπότε: $\begin{cases}h'(\alpha)=0\\ h'(\beta)=0\\ h'(5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(\alpha)=0\\ f'(\beta)=0\\ f'(5)=0\end{cases}$.

Επειδή $f(\alpha)=f(\beta)=f(5)=0$ η C_f εφάπτεται του άξονα x΄x στα σημεία $A(\alpha,0),B(\beta,0)$ και $\Gamma(5,0)$.