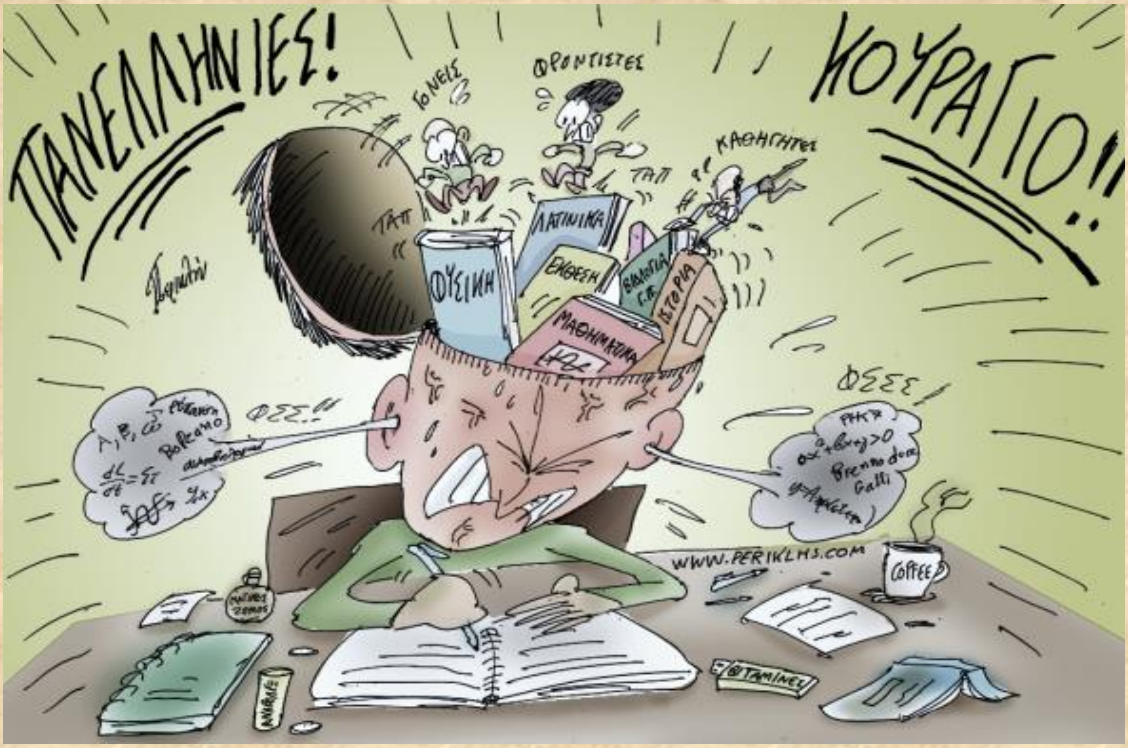
ΤΕΛΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

9 Επαναληπτικές Ασκήσεις από την ομάδα του Askisopolis

για τις πανελλαδικές του 2022

Δεύτε λάβετε τελευταίον ασπασμόν!



Αντώνης Βαλέργας **Αποστόλης Κακαβάς**

Στέλιος Μιχαήλογλου **Άγγελος Μπλιάς**

Δημήτρης Πατσιμάς **Βαγγέλης Ραμαντάνης**

Νίκος Σαμπάνης **Βαγγέλης Τόλης**

Νίκος Τούντας

www.askisopolis.gr

Α Ομάδα

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x\ln x+1-e^{x-1}$ και $f^3(x)=g(x)$.

α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα σημεία καμπής και το πρόσημό της. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της g.

β) Να βρείτε το τύπο της συνάρτησης f.

γ) Να αποδείξετε ότι αν Ε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f του άξονα x΄x , τις ευθείες x =2 και x = e τότε: $E>(e-2)\sqrt[3]{e-\ln(4e)}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x\ln x-x+1,\ x>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι κανένα σημείο της γραφικής της παράστασης δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

α) Να αποδείξετε ότι α = 1.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2x-1-x^2$ για κάθε $x>0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται στον άξονα x΄x.

δ) Να βρείτε τα $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ για τα οποία η ευθεία $y=\beta x+\gamma$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(e,f(e))$.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\ln x-x^2+3x-2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,e)$.

στ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=f(2)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=\dfrac{\pi}{8}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xf(x)\right]\neq-\infty$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

β) Αν $\theta\in(0,1)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f^2(e^\theta)-f^2(\theta)}{x-1}=\dfrac{f(\eta\mu^2\theta)-f(\theta^2)}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$.

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\leq 0$ ισχύει $\dfrac{x}{5}+\dfrac{\pi}{8}\leq f(x)<\dfrac{1}{2-x}$

ε) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{10}<\int_{-1}^{0}f(x)dx<\ln\dfrac{3}{2}$

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου Ω που σχηματίζεται από τη C_f ,τους άξονες και την ευθεία $x=2$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x-x^2, x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και την κυρτότητα.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+x^2\right)\cdot\eta\mu x$.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

ε) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f ,τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1, x=e$ είναι ίσο με $E=\frac{e^3-7}{3}$.

στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\sqrt{x-1}-1, x\geq 1$ έχει μοναδική λύση.

ζ) Αν $\alpha,\beta>0$ με $\alpha<\beta$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)=\frac{2}{\xi_2}-\beta-\alpha$.

η) Δίνεται ότι $f(g(x))=2x-e^{2x}, x>0$ όπου $g:(0,+\infty)\to(1,+\infty)$. Να δείξετε ότι

i) $g(x)=e^x, x>0$

ii) η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)+x^2, x>0$ παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο.

θ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $k(x)=\begin{cases} f(x), x\geq 1 \\ -e^{x-1}+x-1, x<1 \end{cases}$ είναι:

i) συνεχής στο1 **ii)** παραγωγίσιμη στο 1.

ι) Σημείο Μ(x,y) κινείται στη γραφική παράσταση της f.Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι ίσος με τα $\frac{16}{3}$ του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι διάφορος του μηδενός.

ια) Δίνεται η συνάρτηση $m(x)=\frac{f(x)+x^2}{\ln x+1}$.

i) Να δείξετε ότι η m αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της m^{-1}.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+\alpha\ln(\alpha+1)+3, x\in\mathbb{R}, \alpha>-1$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α η ελάχιστη τιμή της f γίνεται ελάχιστη.

β) Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f μηδενίζεται για δύο ακριβώς τιμές του α.

γ) Να βρείτε διάστημα (κ,κ+1) , κ ακέραιος στο οποίο βρίσκεται η θετική ρίζα της ελάχιστης τιμής.

Αν α > 2:

δ) Να βρείτε συναρτήσει του α το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x= -1 και x=1.

ε) Αν η παράμετρος α μεταβάλλεται με ρυθμό $\alpha'(t)=-3$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του παραπάνω εμβαδού τη χρονική στιγμή που είναι $\alpha=e^2-1$.

6. Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ του κόστους κατασκευής x χιλιάδων προϊόντων που παράγονται από μία βιομηχανία για την οποία ισχύουν τα εξής :

- Η f είναι συνεχής
- Η κλίση της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(x,f(x)), για x > 1 είναι $-\frac{2}{x^2}$
- Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής x παραγόμενων προϊόντων όταν αυτά είναι το πολύ 1000 είναι e^{x-1}
- Τα πάγια έξοδα της βιομηχανίας χωρίς να παραχθεί κάποιον προϊόν ανέρχονται σε $\frac{1+e}{e}$ χιλιάδες ευρώ.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1, & 0\leq x\leq 1 \\ \frac{2}{x}, & x>1 \end{cases}$

β) Να βρείτε πότε αυξάνεται και πότε μειώνεται το κόστος των παραγόμενων προϊόντων της βιομηχανίας καθώς και πότε γίνεται μέγιστο .

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έτσι ώστε το κόστος να είναι ίσο με $\frac{e}{2}$

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται. Στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $\varphi(x)=f(x),\ x\in[0,1]$.

ε) Έστω $0<\lambda\neq 1$ και $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = λ και x=1. Να βρείτε ένα διάστημα της μορφής $(\lambda,\lambda+1),\lambda\in\mathbb{N}$ στο οποίο να υπάρχει μοναδικό $\lambda_0\neq\sqrt{e}$ ώστε το εμβαδόν Ε(λ) να είναι ίσο με 1 . Στην συνέχεια να βρείτε σε ποιο άκρο του διαστήματος $(\lambda,\lambda+1),\lambda\in\mathbb{N}$ είναι πιο κοντά το λ_0

στ) Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2022e^{x^2}}{f(x-1)-2}+\dfrac{2022e^{x^2}}{2-f(x)-\frac{x}{2}}\right)$.

Β Ομάδα
Αυξημένης δυσκολίας

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x+\alpha)^2\sqrt{\beta+x^3}$, $g(x)=\eta\mu(x+\gamma)\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}+\beta-1$ και

$h(x)=\begin{cases} f(x)\ ,\ -1\leq x\leq 0 \\ g(x)\ ,\ 0<x\leq\pi \end{cases}$ με $\alpha,\beta\in[0,+\infty)$ και $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

- Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[-1,0]$.
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

α) Να αποδείξετε ότι:
i) $\beta\geq 1$
ii) $\alpha=\gamma=0$ και $\beta=1$.

β) Να εξετάσετε αν η h είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(-1,0]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

δ) Αφού βρείτε στο διάστημα $[0,\pi]$ την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, η οποία την διαπερνά, στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}+2x=\pi+2$ στο διάστημα αυτό.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $h'(x_1)=0$.

στ) Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
ζ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της h και του άξονα x΄x.

8. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(1)=g(1)=e$ και f ΄συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\leq\int_0^2|f(x)|dx$ και στη συνέχεια $\int_0^2|f\ '(x)|dx\geq|f(0)-e|+|e-f(2)|$.

β) Έστω $\varphi(x)=f(x)+g(x),\quad x>0$ με $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(x+3h)-\varphi(x-2h)}{5h}+\dfrac{1}{x}=\varphi(x)+\ln x$, για κάθε x >0 να βρείτε τη συνάρτηση φ.

γ) Αν $d(x)$ είναι η απόσταση των σημείων $M(x,2e^x)$ και $N(x,\ln x)$,τότε
i) Να δείξετε ότι $d(x)=\varphi(x)$.
ii) Αν $d(x)=2e^x-\ln x$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $d(x)$ έχει ελάχιστο για $x=x_0$ με $0<x_0<1$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\eta\mu\left(x-x_0\right)\cdot \ln\left(2-x\right)\cdot \ln\left(1+x_0-x\right)}{\left(d(x)-d(x_0)\right)\cdot\left(x-x_0\right)^4}$.

ε) Υλικό σημείο κινείται κατά μήκος της καμπύλης της συνάρτησης $d(x)$. Αν τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του υλικού σημείου είναι 2cm/sec,να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι $4e^2-1$.

9. **α)** Αν για την συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g ισχύει g(x)>0 , για κάθε $x\in\mathbb{R}$,για την παραγωγίσιμη συνάρτηση

φ ισχύει ότι $\varphi'\left(x\right)\neq 1$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $\int_{\varphi(x_0)}^{x_0} g\left(x\right)dx=0$ να δειχθεί ότι η εξίσωση

$\varphi\left(x\right)=x$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

β) Αν για την συνεχή στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x)\geq\dfrac{\eta\mu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}$ $,x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)-\dfrac{\eta\mu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}\right)dx=0,\nu\in\mathbb{N}^*$ τότε να δειχθεί ότι $f\left(x\right)=\dfrac{\eta\mu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\nu\in\mathbb{N}^*$.

γ) Να δειχθεί ότι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{\pi}{4}$.

δ) Να βρεθεί η συνεχή στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ συνάρτηση h για την οποία ισχύει $h^2\left(x\right)=f\left(x\right)$,όπου ν=2 και $h(\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ε) Να βρεθεί η συνεχή στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ συνάρτηση σ για την οποία ισχύει:

$$\sigma\left(x\right)=h\left(x\right)+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sigma\left(t\right)-xt\sigma\left(t\right)\right)dt.$$

Α Ομάδα

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x\ln x+1-e^{x-1}$ και $f^3(x)=g(x)$.

α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα σημεία καμπής και το πρόσημό της. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της g.

β) Να βρείτε το τύπο της συνάρτησης f.

γ) Να αποδείξετε ότι αν E το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f του άξονα x΄x , τις ευθείες x =2 και x = e τότε: $E>(e-2)\sqrt[3]{e-\ln(4e)}$.

Λύση

α) Για κάθε x > o είναι $g'(x)=\ln x+1-e^{x-1}$, $g''(x)=\dfrac{1}{x}-e^{x-1}$,

x	0	1	+∞
g΄΄	+	0	−
g΄	↗		↘

Είναι $g^{(3)}(x)=-\dfrac{1}{x^2}-e^{x-1}<0$ άρα η $g''(x)$ γνησίως φθίνουσα με προφανή ρίζα το 1.

Για κάθε 0<x<1 είναι $g''(x)>g''(1)=0$ και για κάθε x > 1 είναι $g''(x)<g''(1)=0$.

Επειδή η g΄ είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Για κάθε 0<x<1 είναι $g'(x)<g'(1)=0$ και για κάθε x > 1 είναι $g'(x)<g'(1)=0$.

x	0	1	+∞
g΄	−	0	−
g	↘		↘

Άρα $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)-\{1\}$ και επειδή η g είναι συνεχής στο 1 θα είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Ακόμη για κάθε 0<x <1 είναι $g''(x)>0$ και για κάθε x > 1 είναι $g''(x)<0$, οπότε η g είναι κυρτή στο $(0,1]$ και κοίλη στο $[1,+\infty)$.

Τότε η g έχει σημείο καμπής το (1,g(1)) ή (1,0).

x	0	1	+∞
g΄΄	+	0	−
g	∪		∩

Η g είναι γνησίως φθίνουσα με προφανή ρίζα το 1 και άρα το πρόσημο της g φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	0	1	+∞
g	+	0	−

Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού.

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x+1-e^{x-1})=\frac{e-1}{e}\ \text{Αφού}\ \lim_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DL}{=}}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x\ln x+1-e^{x-1})=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{x-1}\left(\frac{x\ln x}{e^{x-1}}+\frac{1}{e^{x-1}}-1\right)\right]=-\infty\ \text{αφού}$$

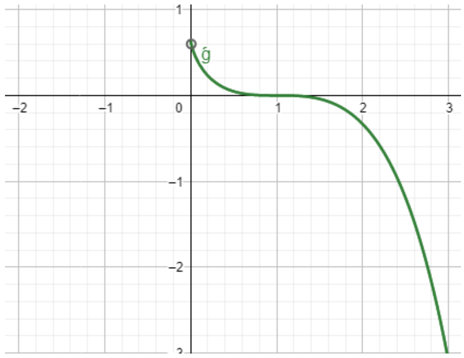
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln x}{e^{x-1}}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{e^{x-1}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^{x-1}}=0$$

Επιπλέον $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln x+1-e^{x-1}}{x}\right)\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DL}{=}}\lim_{x\to+\infty}(\ln x+1-e^{x-1})\ \lim_{x\to+\infty}\left[e^{x-1}\left(\frac{\ln x}{e^{x-1}}+\frac{1}{e^{x-1}}-1\right)\right]=-\infty$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{e^{x-1}}\right)\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DL}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{xe^{x-1}}\right)=0$$

Και επειδή η f είναι συνεχής δεν έχουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Κάνοντας τον πίνακα μεταβολών προκύπτει η γραφική παράσταση της g.



x	0		1		$+\infty$
g''		$+$	0	$-$	
g'		$-$		$-$	
g		↘		↘	

β) Από το πρόσημο της g προκύπτει $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt[3]{x\ln x+1-e^{x-1}} & ,x\in(0,1]\\ -\sqrt[3]{-x\ln x-1+e^{x-1}} & ,x>1\end{cases}$

γ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_2^e\left|f(x)\right|dx$ όμως στο [2,e] είναι $f(x)<0$ άρα

$E=-\int_2^e f\left(x\right)dx=\int_2^e(\sqrt[3]{-x\ln x-1+e^{x-1}})dx$.

Αν $b(x)=\sqrt[3]{-x\ln x-1+e^{x-1}}$, τότε $b(x)=\sqrt[3]{-g(x)}$ και $b'(x)=\dfrac{-g'(x)}{\sqrt[3]{(-g(x))^2}}>0$. Άρα η b είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $2\le x\le e\Rightarrow b(2)\le b(x)\Rightarrow\int_2^e b(2)dt<\int_2^e b(x)dx\Rightarrow$ (αφού η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[2,e]$), $b(2)(e-2)<E\Rightarrow$ (e-2) $\sqrt[3]{e-\ln(4e)}$ <E.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\alpha x\ln x-x+1,\ x>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι κανένα σημείο της γραφικής της παράστασης δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

α) Να αποδείξετε ότι α = 1.

β) Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)\ge 2x-1-x^2$ για κάθε $x>0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται στον άξονα x΄x.

δ) Να βρείτε τα $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ για τα οποία η ευθεία $y=\beta x+\gamma$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\left(e,f\left(e\right)\right)$.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=\ln x-x^2+3x-2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(1,e\right)$.

στ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f\left(x\right)=f\left(2\right)$.

Λύση

α) Επειδή κανένα σημείο της γραφικής παράστασης της f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x, είναι $f\left(x\right)\ge 0$ για κάθε x > 0. Παρατηρούμε ότι $f\left(1\right)=0$, άρα για κάθε x > 0 είναι $f\left(x\right)\ge f\left(1\right)$ επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x = 1 που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με $f'\left(x\right)=\alpha\ln x+\alpha\cancel{x}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x}}-1$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'\left(1\right)=0\Leftrightarrow\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

β) $f\left(x\right)\ge 2x-1-x^2\Leftrightarrow x\ln x-x+1\ge 2x-1-x^2\Leftrightarrow x\ln x-3x+x^2+2\ge 0$

Έστω $g\left(x\right)=x\ln x-3x+x^2+2,\ x>0$.

Είναι $g'\left(x\right)=\ln x+1-3+2x=\ln x+2x-2$ και $g''\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+2>0\Rightarrow g'\nearrow\left(0,+\infty\right)$.

Παρατηρούμε ότι $g'(1)=0$, οπότε:

Για κάθε $0<x<1 \overset{g'\nearrow}{\Rightarrow} g'(x)<g'(1)=0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>1 \overset{g'\nearrow}{\Rightarrow} g'(x)>g'(1)=0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η g έχει ελάχιστο στο x = 1, άρα για κάθε x > 0 ισχύει ότι $g(x)\ge g(0) \Leftrightarrow g(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\ln x-3x+x^2-2\ge 0$.

2ος τρόπος

Είναι $g'(x)=\ln x+2x-2=\ln x+2(x-1)$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $\ln x<0,\ x-1<0 \Rightarrow g'(x)<0 \Rightarrow g\searrow(0,1]$

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $\ln x>0,\ x-1>0 \Rightarrow g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow[1,+\infty)$

Η g έχει ελάχιστο στο x = 1, άρα για κάθε x > 0 ισχύει ότι $g(x)\ge g(0) \Leftrightarrow x\ln x-3x+x^2-2\ge 0$

γ) Επειδή $f(1)=0$ και $f'(1)=0$ η C_f εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο (1,0).

δ) Αρχικά πρέπει $f'(e)=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \ln e=\beta \Leftrightarrow \beta=1$.

Είναι $f(e)=e\ln e-e+1=e-e+1=1$. Η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(e,1), οπότε $1=e+\gamma \Leftrightarrow 1-e=\gamma$

ε) $f(x)=\ln x-x^2+3x-2 \Leftrightarrow x\ln x-x+1-\ln x+x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \ln x(x-1)+x^2-4x+3=0$

Έστω $h(x)=\ln x(x-1)+x^2-4x+3,\ x\in[1,e]$. Είναι $h(1)=0$, οπότε αρχικά δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για την h. όμως

$h(x)=\ln x(x-1)+x^2-4x+3=\ln x(x-1)+(x-1)(x-3)=(x-1)(\ln x+x-3)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x+x-3,\ x\in[1,e]$.

Είναι $\varphi(1)=-2,\ \varphi(e)=e-2>0$, οπότε $\varphi(1)\varphi(e)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho)=0$. Τότε $h(\rho)=(\rho-1)\varphi(\rho)=0$

στ) Είναι $f(x)=x\ln x-x+1,\ x>0$, $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=0$.

Για κάθε x > 1 η f είναι 1-1 όποτε $f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$ μοναδική λύση στο διάστημα αυτό.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x-x+1)=1$.

Στο διάστημα $\Delta_1=(0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=(0,1)$.

Είναι $1<2<e \overset{f\nearrow[1,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(1)<f(2)<f(e)\Leftrightarrow 0<f(2)<1$

2ος τρόπος: $f(2)=2\ln2-1=\ln\frac{4}{e}$. Όμως $0<\ln\frac{4}{e}<1\Leftrightarrow \ln1<\ln\frac{4}{e}<\ln e\Leftrightarrow 1<\frac{4}{e}<e$ οπότε $0<f(2)<1$.

Επειδή το $f(2)$ περιέχεται στο $f(\Delta_1)=(0,1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, υπάρχει μοναδικό

$x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = f(2)$.

Τελικά η εξίσωση $f(x) = f(2)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

3. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = \dfrac{\pi}{8}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} [xf(x)] \neq -\infty$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

β) Αν $\theta \in (0,1)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f^2(e^\theta) - f^2(\theta)}{x-1} = \dfrac{f(\eta\mu^2\theta) - f(\theta^2)}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \leq 0$ ισχύει $\dfrac{x}{5} + \dfrac{\pi}{8} \leq f(x) < \dfrac{1}{2-x}$

ε) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{10} < \int_{-1}^{0} f(x)dx < \ln\dfrac{3}{2}$

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου Ω που σχηματίζεται από τη C_f ,τους άξονες και την ευθεία $x = 2$.

Λύση

α) Είναι $x^2 - 4x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta = -4 < 0$ και $\alpha = 1 > 0$, οπότε $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5} > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$,με σύνολο τιμών $f(A) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right)$.Συνεπώς δεν μπορεί να είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Επίσης , αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε δεν μπορεί να είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \alpha < 0$ ή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ γιατί τότε θα υπάρχει $\beta < 0$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) < 0$ (άτοπο).

Αν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \gamma > 0$ τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} [xf(x)] \overset{-\infty\cdot\gamma}{=} -\infty$ (άτοπο). Συνεπώς, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

β) Η εξίσωση $\dfrac{f^2(e^\theta) - f^2(\theta)}{x-1} = \dfrac{f(\eta\mu^2\theta) - f(\theta^2)}{x}$ ισοδύναμα γίνεται

$x\left[f^2(e^\theta) - f^2(\theta)\right] - (x-1)\left[f(\eta\mu^2\theta) - f(\theta^2)\right] = 0$.Θεωρούμε τη συνάρτηση

$h(x) = x\left[f^2(e^\theta) - f^2(\theta)\right] - (x-1)\left[f(\eta\mu^2\theta) - f(\theta^2)\right]$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξη συνέχων

και $h(0) = \left[f(\eta\mu^2\theta) - f(\theta^2)\right] < 0$ γιατί $0 < \eta\mu\theta < \theta < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta < \theta^2 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(\eta\mu^2\theta) < f(\theta^2)$.

Επίσης $h(1)=\left[f^2\left(e^\theta\right)-f^2(\theta)\right]>0$ γιατί για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ είναι $e^\theta\geq\theta+1>\theta\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(e^\theta\right)>f(\theta)>0$ άρα και $f^2\left(e^\theta\right)>f^2(\theta)$. Οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(0,1):h(\rho)=0$.

Επίσης $h'(x)=\left[f^2\left(e^\theta\right)-f^2(\theta)\right]+\left[f\left(\theta^2\right)-f\left(\eta\mu^2\theta\right)\right]>0$

Συνεπώς, η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα ρ είναι μοναδική.

γ) Η $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=-\dfrac{2x-4}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$.

Είναι $f''(x)>0\Leftrightarrow-\dfrac{2x-4}{\left(x^2-4x+5\right)^2}>0\Leftrightarrow 2x-4<0\Leftrightarrow x<2$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(-\infty,2]$ και κοίλη στο $[2,+\infty)$.

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ είναι $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{\pi}{8}$.

δ) Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,2]$ οπότε η C_f θα είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της εκτός από το σημείο επαφής. Άρα $f(x)\geq\dfrac{x}{5}+\dfrac{\pi}{8}$ (1) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Επίσης για $x\leq 0$ είναι

$$f'(x)=\frac{1}{x^2-4x+4+1}=\frac{1}{(x-2)^2+1}<\frac{1}{(x-2)^2}\Leftrightarrow f'(x)<\frac{1}{(x-2)^2}\Leftrightarrow f'(x)-\frac{1}{(x-2)^2}<0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x-2}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με

$g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{(x-2)^2}<0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,0]$ με σύνολο τιμών

$g(A_1)=\left[g(0),\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=\left[\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2},0\right)$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\dfrac{1}{x-2}\right)=0+0=0$, άρα $g(x)<0$ στο $(-\infty,0]$ δηλαδή $f(x)+\dfrac{1}{x-2}<0\Leftrightarrow f(x)<-\dfrac{1}{x-2}\Leftrightarrow f(x)<\dfrac{1}{2-x}$ (2).

Από (1),(2) προκύπτει $\dfrac{x}{5}+\dfrac{\pi}{8}\leq f(x)<\dfrac{1}{2-x}$.

ε) Είναι $\dfrac{x}{5}+\dfrac{\pi}{8}\leq f(x)<\dfrac{1}{2-x}$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε x τότε

$$\int_{-1}^{0}\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{8}\right)dx<\int_{-1}^{0}f(x)dx<\int_{-1}^{0}\frac{1}{2-x}dx\Leftrightarrow\frac{1}{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\frac{\pi}{8}<\int_{-1}^{0}f(x)dx<-\left[\ln(2-x)\right]_{-1}^{0}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{8}-\frac{1}{10}<\int_{-1}^{0}f(x)dx<\ln\frac{3}{2}$$

στ. Αφού $f(x)>0$ τότε $E(\Omega)=\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x)'f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^2-\int_0^2 x\frac{1}{x^2-4x+5}dx=$

$$=2f(2)-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2x-4+4}{x^2-4x+5}dx=2f(2)-\frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{2x-4}{x^2-4x+5}+\frac{4}{x^2-4x+5}\right)dx=$$

$$=2f(2)-\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2-4x+5\right|\right]_0^2-2\int_0^2 f'(x)dx=2f(2)-\frac{1}{2}(\ln1-\ln5)-2\left[f(x)\right]_0^2$$

$$=2f(2)+\frac{1}{2}\ln5-2f(2)+2f(0)=\frac{1}{2}\ln5+\frac{\pi}{4}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x-x^2, x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και την κυρτότητα.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+x^2\right)\cdot ημx$.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

ε) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f ,τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1, x=e$ είναι ίσο με $E=\dfrac{e^3-7}{3}$.

στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\sqrt{x-1}-1, x\geq 1$ έχει μοναδική λύση.

ζ) Αν $α,β>0$ με $α<β$, να δείξετε ότι υπάρχουν $ξ_1,ξ_2\in(α,β)$ τέτοιοι ώστε $f'(ξ_1)=\dfrac{2}{ξ_2}-β-α$.

η) Δίνεται ότι $f(g(x))=2x-e^{2x}, x>0$ όπου $g:(0,+\infty)\to(1,+\infty)$. Να δείξετε ότι

i) $g(x)=e^x, x>0$

ii) η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)+x^2, x>0$ παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο.

θ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $k(x)=\begin{cases} f(x), x\geq 1 \\ -e^{x-1}+x-1, x<1 \end{cases}$ είναι:

i) συνεχής στο1 **ii)** παραγωγίσιμη στο 1.

ι) Σημείο Μ(x,y) κινείται στη γραφική παράσταση της f.Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι ίσος με τα $\dfrac{16}{3}$ του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι διάφορος του μηδενός.

ια) Δίνεται η συνάρτηση $m(x)=\dfrac{f(x)+x^2}{\ln x+1}$.

i) Να δείξετε ότι η m αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της m^{-1}.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{2}{x}-2x=\dfrac{2(1-x^2)}{x}=\dfrac{2(1+x)(1-x)}{x}$.

Είναι $f'(x)\geq 0 \underset{x>0}{\overset{1+x>0}{\Leftrightarrow}} \Leftrightarrow 1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, $f'(x)>0$ στο $(0,1)$, $f'(x)<0$ στο $(1,+\infty)$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο 1 το $f(1)=-1$.

Επίσης η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με δεύτερη παράγωγο

$f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}-2<0$ άρα είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

β) Έστω $B(x_0,f(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της f .

Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο αυτό έχει εξίσωση :

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-2\ln x_0+x_0^2=\left(\frac{2}{x_0}-2x_0\right)(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$y=\left(\frac{2}{x_0}-2x_0\right)x-2+2x_0^2+2\ln x_0-x_0^2\Leftrightarrow y=\left(\frac{2}{x_0}-2x_0\right)x-2+x_0^2+2\ln x_0.$$

Το σημείο Α ανήκει στην (ε) οπότε $-1=-2+x_0^2+2\ln x_0 \Leftrightarrow x_0^2+2\ln x_0-1=0$ (1).
Θεωρούμε τη συνάρτηση $a(x)=x^2+2\ln x-1, x>0$.

Η a είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $a'(x)=2x+\dfrac{2}{x}>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Από την (1) έχουμε ισοδύναμα $a(x_0)=0 \Leftrightarrow a(x_0)=a(1) \overset{a\nearrow}{\Leftrightarrow} x_0=1$.

Για $x_0=1$ η (ε) έχει εξίσωση $y=-1$.

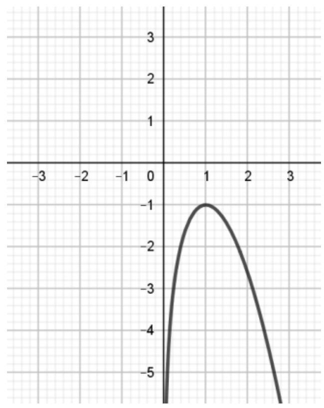
γ) Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)+x^2\right)\cdot ημx=\lim\limits_{x\to0}2\ln x\cdot ημx=\lim\limits_{x\to0}\left(2x\ln x\cdot\dfrac{ημx}{x}\right)=0\cdot1=0$ αφού

$$\lim_{x\to0}x\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim_{x\to0}(-x)=0.$$

δ) Είναι :

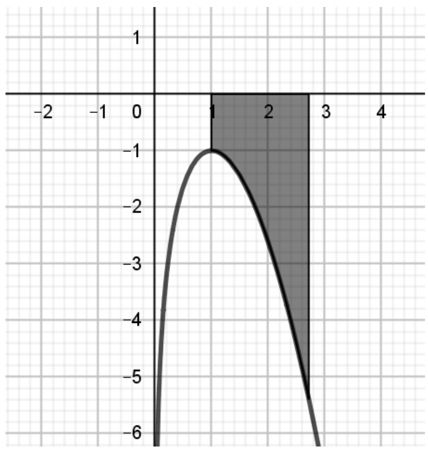
- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2\ln x-x^2\right)=-\infty$ άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\ln x-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(2\dfrac{\ln x}{x^2}-1\right)\right]=+\infty\cdot(0-1)=-\infty$ αφού

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$, οπότε δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln x}{x}-x\right)=2\cdot0-\infty=-\infty$, οπότε δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.



x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	TM	$\searrow$

ε) Για $x\in[1,e]$ είναι $f(x)\le f(1)=-1<0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι :



$$E=-\int_1^e f(x)dx=-\int_1^e\left(2\ln x-x^2\right)dx=-2\int_1^e\ln x\,dx+\int_1^e x^2dx \Leftrightarrow$$

$$E=-2\int_1^e x'\ln x\,dx+\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e=-2\left[x\ln x\right]_1^e+2\left[x\right]_1^e+\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$E=\cancel{-2e}+\cancel{2e}-2+\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow E=\frac{e^3-7}{3}.$$

στ) Είναι $f(x)<-1$ για $x>1$ και $\sqrt{x-1}-1>-1$ για κάθε $x>1$.
Όμως το 1 ρίζα της εξίσωσης $f(x)=\sqrt{x-1}-1$, η οποία όπως δείξαμε είναι μοναδική.

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $b(x)=f(x)-\sqrt{x-1}+1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με παράγωγο

$b'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}<0$ για $x>1$.

Η b είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Όμως $b(1)=0$ άρα το 1 μοναδική λόγω της μονοτονίας ρίζα της εξίσωσης $b(x)=0$.

ζ) Για την f ισχύει το ΘΜΤ στο $[\alpha,\beta]$ άρα υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{2\ln\beta-\beta^2-2\ln\alpha+\alpha^2}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)=\frac{2\ln\beta-2\ln\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=2\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{\cancel{(\beta-\alpha)}(\beta+\alpha)}{\cancel{\beta-\alpha}}\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)=2\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}-\beta-\alpha.(2)$$

Για την συνάρτηση $c(x)=\ln x$ ισχύει το ΘΜΤ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε

$$c'(\xi_2)=\frac{c(\beta)-c(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi_2}=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}\ (3).$$

Από τη σχέση (2) έχουμε μέσω της (3) ότι $f'(\xi_1)=\dfrac{2}{\xi_2}-\beta-\alpha$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

η) i) Πρέπει :

$$\begin{cases}x\in A_g\\ g(x)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ g(x)>0\ \text{ισχύει}\end{cases}\Leftrightarrow x>0.$$

Είναι $f(g(x))=2x-e^{2x}\Leftrightarrow f(g(x))=2\ln e^x-(e^x)^2\Leftrightarrow f(g(x))=f(e^x)\underset{\substack{g(x)>1,\\ x>0\Leftrightarrow e^x>1}}{\overset{f\searrow(1,+\infty)}{\Leftrightarrow}}g(x)=e^x$.

ii) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $h'(x)=f'(x)-e^x+2x=\dfrac{2}{x}-e^x$ και δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο $h''(x)=-\dfrac{2}{x^2}-e^x<0$ οπότε η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}h'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2}{x}-e^x\right)=+\infty-1=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}h'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}-e^x\right)$ οπότε

το σύνολο τιμών της h' είναι $h'((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h'(x),\lim\limits_{x\to0^+}h'(x)\right)=(-\infty,+\infty)$.

Το $0\in h'((0,+\infty))$ οπότε υπάρχει $x_0>0$ τέτοιος ώστε $h'(x_0)=0$.

Για $x<x_0\overset{h'\searrow}{\Leftrightarrow}h'(x)>h'(x_0)=0$ και για $x>x_0\overset{h'\searrow}{\Leftrightarrow}h'(x)<h'(x_0)=0$.

Η h συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,x_0]$,γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,+\infty)$

και παρουσιάζει μέγιστο στο x_0, το οποίο είναι μοναδικό αφού η h' είναι γνησίως φθίνουσα .

θ) i) Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}k(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=-1$, $\lim\limits_{x\to1^+}k(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(-e^{x-1}+x-1\right)=-1$, $k(1)=-1$ άρα η k είναι συνεχής στο 1.

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{k(x)-k(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{k(x)-k(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-e^{x-1}+x\cancel{-1}+\cancel{1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-e^{x-1}+x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-e^{x-1}+1\right)=0$ οπότε η συνάρτηση k είναι: παραγωγίσιμη στο 1 με $k'(1)=0$.

ι) Έστω $M\left(x(t),y(t)\right)$. Είναι $y(t)=2\ln x(t)-x^2(t)$.

Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι $y'(t)=\dfrac{2x'(t)}{x(t)}-2x(t)x'(t)$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ ίσος με τα $\dfrac{16}{3}$ της τετμημένης του .

Για $t=t_0$ Έχουμε $y'(t_0)=\dfrac{2x'(t_0)}{x(t_0)}-2x(t_0)x'(t_0)\Leftrightarrow\dfrac{16}{3}\cancel{x'(t_0)}=\dfrac{2\cancel{x'(t_0)}}{x(t_0)}-2x(t_0)\cancel{x'(t_0)}\Leftrightarrow$

$\dfrac{\overset{8}{\cancel{16}}}{3}=\dfrac{\overset{1}{\cancel{2}}}{x(t_0)}-\cancel{2}x(t_0)\Leftrightarrow 8x(t_0)=3-3x^2(t_0)\Leftrightarrow 3x^2(t_0)+8x(t_0)-3=0\Leftrightarrow$

$\left(x(t_0)=-3 \text{ απορρίπτεται}\right)$ ή $\left(x(t_0)=\dfrac{1}{3}\right)$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(\dfrac{1}{3},-2\ln 3-\dfrac{1}{9}\right)$.

ια) Είναι $m(x)=\dfrac{f(x)+x^2}{\ln x+1}=\dfrac{2\ln x}{\ln x+1},x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

i) Για κάθε $x_1,x_2\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ με

$m(x_1)=m(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{\cancel{2}\ln x_1}{\ln x_1+1}=\dfrac{\cancel{2}\ln x_2}{\ln x_2+1}\Leftrightarrow\cancel{\ln x_1\cdot\ln x_2}+\ln x_1=\cancel{\ln x_1\cdot\ln x_2}+\ln x_2\Leftrightarrow$

$\ln x_1=\ln x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ οπότε η m είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

ii) Η m είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ με παράγωγο

$m'(x)=\dfrac{\dfrac{2\ln x+2}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}}{(\ln x+1)^2}=\dfrac{2}{x(\ln x+1)^2}>0$ άρα η είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(0,\dfrac{1}{e}\right),\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}m(x)\overset{u=\ln x}{\underset{\substack{x\to 0^+,\\ u\to-\infty}}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{2u}{u+1}=\lim\limits_{a\to-\infty}\dfrac{2u}{u}=2,\ \lim\limits_{x\to+\infty}m(x)\overset{t=\ln x}{\underset{\substack{x\to+\infty,\\ t\to+\infty}}{=}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2t}{t+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{2t}{t}=2$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-}m(x)\overset{b=\ln x}{\underset{\substack{x\to\frac{1}{e}^-,\\ b\to-1^-}}{=}}\lim\limits_{b\to-1^-}\dfrac{2b}{b+1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+}m(x)\overset{c=\ln x}{\underset{\substack{x\to\frac{1}{e}^+,\\ c\to-1^+}}{=}}\lim\limits_{c\to-1^+}\dfrac{2c}{c+1}=-\infty$.

Το πεδίο ορισμού της m^{-1} είναι

$A_{m^{-1}}=m(A)=m\left(\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\right)\cup m\left(\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)\right)\overset{m\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to 0^+}m(x),\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-}m(x)\right)\cup\left(\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+}m(x),\lim\limits_{x\to+\infty}m(x)\right)\Leftrightarrow$

$A_{m^{-1}}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

Θέτουμε $m(x)=y \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{\ln x+1}=y \Leftrightarrow 2\ln x = y\cdot \ln x + y \Leftrightarrow 2\ln x - y\cdot \ln x = y \Leftrightarrow$

$(2-y)\cdot \ln x = y \overset{y\neq 2}{\Leftrightarrow} \ln x = \frac{y}{y-2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{y}{y-2}} \Leftrightarrow m^{-1}(y)=e^{\frac{y}{y-2}}$ οπότε $m^{-1}(x)=e^{\frac{x}{x-2}}, x\neq 2.$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+\alpha\ln(\alpha+1)+3, x\in\mathbb{R}, \alpha>-1$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α η ελάχιστη τιμή της f γίνεται ελάχιστη.

β) Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f μηδενίζεται για δύο ακριβώς τιμές του α.

γ) Να βρείτε διάστημα (κ,κ+1) , κ ακέραιος στο οποίο βρίσκεται η θετική ρίζα της ελάχιστης τιμής.

Αν α > 2:

δ) Να βρείτε συναρτήσει του α το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x= -1 και x=1.

ε) Αν η παράμετρος α μεταβάλλεται με ρυθμό $\alpha'(t)=-3$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του παραπάνω εμβαδού τη χρονική στιγμή που είναι $\alpha=e^2-1$.

Λύση

α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2,\ f'(x)>0 \Leftrightarrow x>2$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$,γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$

άρα παρουσιάζει ελάχιστο για x=2 το $f(2)=2^2-4\cdot 2+\alpha\ln(\alpha+1)+3=\alpha\ln(\alpha+1)-1$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x\ln(x+1)-1, x>-1$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο

$(-1,+\infty)$ με $g'(x)=(x\ln(x+1)-1)'=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$.

Παρατηρούμε ότι $g'(0)=0$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο

$(-1,+\infty)$ με $g''(x)=\left(\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{1}{x+1}(x+1)'+\frac{x'\cdot(x+1)-x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}>0$ άρα

g΄ γνησίως αύξουσα. Οπότε $g'(x)>0 \Leftrightarrow g'(x)>g'(0) \overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow} x>0$ και $g'(x)<0 \Leftrightarrow g'(x)<g'(0) \overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow} x<0$.

Η g είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$,γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$,

άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο x =0 το $g(0)=-1$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή της f γίνεται ελάχιστη για α=0.

β) Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1=(-1.0], οπότε $g(\Delta_1)=\left[g(0), \lim_{x\to -1^+} g(x)\right)=[-1,+\infty)$

αφού $\lim_{x\to -1^+} g(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(x\ln(x+1)\right) \overset{-1(-\infty)}{=} +\infty$.

Το $0\in g(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει μοναδικό ,λόγω της μονοτονίας της g , $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0$

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=(0,+\infty)$, οπότε $g(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to 0^+} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right)=(-1,+\infty)$

αφού $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln(x+1)\right)=+\infty$.

Το $0\in g(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει μοναδικό , λόγω της μονοτονίας της g, $x_2\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_2)=0$.

Επομένως η g μηδενίζεται για δύο ακριβώς τιμές του x.

γ) Παρατηρούμε ότι $g(1)=\ln 2-1<0$ και $g(2)=2\ln 3-1=\ln 9-1>0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον $\rho\in(1,2)$ τέτοιος ώστε $g(\rho)=0$. Επειδή η g έχει μοναδική ρίζα $x_2\in(0,+\infty)$ ρ= x_2, οπότε το ζητούμενο διάστημα είναι το (1,2).

δ) Θα βρούμε το πρόσημο της f : Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x=2 , άρα $f(x) \geq f(2) = \alpha \ln(\alpha+1) - 1 = g(\alpha)$

Επίσης $\alpha > 2 > \alpha_2 > 0$ και $g \nearrow [0,+\infty)$ άρα $g(\alpha) > g(\alpha_2) = 0$, επομένως $f(x) > 0$. Οπότε:

$$E(\alpha) = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - 4x + \alpha\ln(\alpha+1) + 3\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + \alpha\ln(\alpha+1)x + 3x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 2 + \alpha\ln(\alpha+1) + 3\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 - \alpha\ln(\alpha+1) - 3\right) = \frac{20}{3} + 2\alpha\ln(\alpha+1)$$

ε) Έστω $E(t) = \frac{20}{3} + 2\alpha(t)\ln\left[\alpha(t)+1\right],\ t \geq 0$.

Είναι $E'(t) = \left(\frac{20}{3} + 2\alpha(t)\ln\left[\alpha(t)+1\right]\right)' = 2\alpha'(t)\ln\left[\alpha(t)+1\right] + 2\alpha(t)\frac{1}{\alpha(t)+1}\alpha'(t)$

Για t=t_0: $\alpha'(t_0) = -3$ και $\alpha(t_0) = e^2 - 1$, επομένως

$$E'(t_0) = 2\alpha'(t_0)\ln\left[\alpha(t_0)+1\right] + 2\alpha(t_0)\frac{1}{\alpha(t_0)+1}\alpha'(t_0) = 2(-3)\ln\left[e^2\right] + 2\left(e^2-1\right)\frac{1}{e^2}(-3) \Leftrightarrow$$

$$E'(t_0) = 6\left(\frac{1}{e^2} - 4\right).$$

6. Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ του κόστους κατασκευής x χιλιάδων προϊόντων που παράγονται από μία βιομηχανία για την οποία ισχύουν τα εξής :

- Η f είναι συνεχής
- Η κλίση της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(x,f(x)), για x > 1 είναι $-\dfrac{2}{x^2}$
- Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής x παραγόμενων προϊόντων όταν αυτά είναι λιγότερο από 1000 είναι e^{x-1}
- Τα πάγια έξοδα της βιομηχανίας χωρίς να παραχθεί κάποιον προϊόν ανέρχονται σε $\dfrac{1+e}{e}$ χιλιάδες ευρώ.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{2}{x}, & x>1\end{cases}$

β) Να βρείτε πότε αυξάνεται και πότε μειώνεται το κόστος των παραγόμενων προϊόντων της βιομηχανίας καθώς και πότε γίνεται μέγιστο .

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έτσι ώστε το κόστος να είναι ίσο με $\dfrac{e}{2}$.

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται. Στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $\varphi(x)=f(x),\ x\in[0,1]$.

ε) Έστω $0<\lambda\ne 1$ και $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = λ και x=1. Να βρείτε ένα διάστημα της μορφής $(\lambda,\lambda+1),\lambda\in\mathbb{N}$ στο οποίο να υπάρχει μοναδικό $\lambda_0\ne\sqrt{e}$ ώστε το εμβαδόν Ε(λ) να είναι ίσο με 1 . Στην συνέχεια να βρείτε σε ποιο άκρο του διαστήματος $(\lambda,\lambda+1),\lambda\in\mathbb{N}$ είναι πιο κοντά το λ_0

στ) Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2022e^{x^2}}{f(x-1)-2}+\dfrac{2022e^{x^2}}{2-f(x)-\dfrac{x}{2}}\right)$.

Λύση

α) Για $0\le x<1$ έχουμε $f'(x)=e^{x-1}\Leftrightarrow f'(x)=\left(e^{x-1}\right)'$ άρα υπάρχει σταθερά $c_1\in\mathbb{R}$ επειδή η f είναι συνεχής στο 1 έτσι ώστε $f(x)=e^{x-1}+c_1$, $x\in[0,1]$ και επειδή $f(0)=\dfrac{e+1}{e}$, έχουμε

$$\frac{e+1}{e}=e^{0-1}+c_1\Leftrightarrow 1+e^{-1}=e^{-1}+c_1\Leftrightarrow c_1=1$$

Για $x>1$ έχουμε $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\dfrac{2}{x}\right)'$ άρα υπάρχει σταθερά $c_2\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x)=\dfrac{2}{x}+c_2$.

Η f είναι συνεχής , άρα θα είναι συνεχής και για x = 1 οπότε

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow 2=2+c_2\Leftrightarrow c_2=0$. Άρα $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{2}{x}, & x>1\end{cases}$, **β)** Για $0\le x<1$ έχουμε $f'(x)=\left(e^{x-1}+1\right)'=e^{x-1}>0$ και επειδή η f είναι συνεχής , f↗[0,1], συνεπώς έως την παραγωγή 1000 το κόστος αυξάνεται.

Άρα η f για x = 1 παρουσιάζει μέγιστο το $f(1)=e^{1-1}+1=2$. Κατά την παραγωγή 1000 προϊόντων το κόστος είναι μέγιστο και ίσο με 2.000 ευρώ .

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{e}{2}$ έχει ακριβώς δύο λύσεις .

Η f είναι συνεχής και $f\nearrow \Delta_1=[0,1]$, άρα $f(\Delta_1)=[f(0),f(1)]=[e^{-1}+1,2]$, διότι $f(0)=e^{0-1}+1$ και $f(1)=e^{1-1}+1=e^0+1=2$.

Είναι $e^{-1}+1<\frac{e}{2}\Leftrightarrow 2+2e<e^2\Leftrightarrow e^2-2e+2>0\Leftrightarrow (e-1)^2+1>0$ ισχύει και $\frac{e}{2}<2\Leftrightarrow e<4$ ισχύει άρα $\frac{e}{2}\in f(\Delta_1)$ και επειδή η $f\nearrow \Delta_1$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in[0,1]$ έτσι ώστε $f(x_1)=\frac{e}{2}$.

Η f είναι συνεχής και $f\searrow\ \Delta_2=(1,+\infty)$, άρα $f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)=(0,2)$, διότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ και $\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)=\frac{2}{1}=2$.

$\frac{e}{2}\in f(\Delta_2)$ και επειδή η $f\searrow\Delta_2$ υπάρχει μοναδικό $x_2\in(1,+\infty)$ έτσι ώστε $f(x_2)=\frac{e}{2}$.

δ) Επειδή υπάρχουν x_1,x_2 με $x_1<x_2$ έτι ώστε $f(x_1)=f(x_2)=\frac{e}{2}$, η f δεν είναι 1 – 1 , συνεπώς δεν αντιστρέφεται .

Η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$οπότε είναι 1 – 1 και αντιστρέφεται .

Είναι $D_{\varphi^{-1}}=\varphi(\Delta_1)=[e^{-1}+1,2]$.

$\varphi(x)=y\Leftrightarrow e^{x-1}+1=y\Leftrightarrow e^{x-1}=y-1\Leftrightarrow x-1=\ln(y-1)\Leftrightarrow x=1+\ln(y-1)\Leftrightarrow \varphi^{-1}(y)=1+\ln(y-1)$ άρα $\varphi^{-1}(x)=1+\ln(x-1),\ x\in[e^{-1}+1,2]$

ε) Ισχύει $f(x)>0$, $\forall x\in[0,+\infty)$. Έστω $0<\lambda<1$. Τότε

$$E(\lambda)=\int_\lambda^1|f(x)|dx=\int_\lambda^1(e^{x-1}+1)dx=\left[e^{x-1}+x\right]_\lambda^1=e^{1-1}+1-e^{\lambda-1}-\lambda=2-e^{\lambda-1}-\lambda$$

Για $\lambda>1$: $E(\lambda)=\int_1^\lambda|f(x)|dx=\int_1^\lambda\frac{2}{x}dx=\left[2\ln|x|\right]_1^\lambda=2\ln|\lambda|-2\ln1=2\ln\lambda$

Για $\lambda>1$ $E(\lambda)=1\Leftrightarrow 2\ln\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\sqrt{e}$, απορρίπτεται άρα για $\lambda>1$ δεν υπάρχει διάστημα της μορφής $(\lambda,\lambda+1),\lambda\in\mathbb{N}$ στο οποίο η E(λ) =1 να έχει μοναδική λύση.

Για $0<\lambda<1$ έχουμε ότι $E(\lambda)=2-e^{\lambda-1}-\lambda$ οπότε αναζητούμε την μοναδική λύση της E(λ)=1 στο διάστημα (0,1) .

$E(\lambda)=1\Leftrightarrow 2-e^{\lambda-1}-\lambda=1\Leftrightarrow 1-e^{\lambda-1}-\lambda=0$. Έστω $g(\lambda)=1-e^{\lambda-1}-\lambda,\lambda\in[0,1]$. Η g είναι συνεχής στο [0,1] ώς άθροισμα και σύνθεση συνεχών. $g(0)=1-e^{0-1}=1-e^{-1}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}>0$,

$g(1)=1-e^{1-1}-1=-e^0=-1<0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda_0\in(0,1)$ ώστε $g(\lambda_0)=0\Leftrightarrow E(\lambda_0)=1$ και επειδή $g'(\lambda)=\left(1-e^{\lambda-1}-\lambda\right)'=-e^{\lambda-1}-1<0$, $g\searrow$[0,1] άρα το λ_0 είναι μοναδικό.

Επίσης παρατηρούμε ότι $g\left(\frac{1}{2}\right)=1-e^{\frac{1}{2}-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}}<0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano και στο διάστημα $\left[0,\frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}}\right]$, άρα το λ_0 βρίσκεται πλησιέστερα στο 0,

στ) η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1)=2 άρα $f(x)\le f(1)\Leftrightarrow f(x)\le 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1 άρα για $x\neq 1$ έχουμε ότι $f(x)<2\Leftrightarrow f(x)-2<0$ οπότε αφού

$\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)-2\right)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)-2=f(1)-2=0$, θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{f(x)-2}=-\infty$

Για x>1 $f''(x)=\frac{4}{x^3}>0$ η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$ άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της με εξαίρεση το σημείο επαφής .

Βρίσκουμε την εφαπτομένη της για x = 2 : $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-1=-\frac{1}{2}(x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{x}{2}+2$

Άρα για $x\neq 2$ ισχύει ότι $f(x)>-\frac{x}{2}+2\Leftrightarrow -\frac{x}{2}+2-f(x)<0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\frac{x}{2}+2-f(x)\right)=0$ **,** θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{-\frac{x}{2}+2-f(x)}\right)=-\infty$ Οπότε

$\lim\limits_{x\to 2}\left(2022e^{x^2}\left(\frac{1}{f(x-1)-2}+\frac{1}{2-f(x)-\frac{x}{2}}\right)\right)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{-\frac{x}{2}+2-f(x)}\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{f(x-1)-2}\right)\underset{\substack{x\to 2\\ u\to 1}}{\overset{x-1=u}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\left(\frac{1}{f(u)-2}\right)=-\infty$

Β Ομάδα

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x+\alpha)^2\sqrt{\beta+x^3}$, $g(x)=\eta\mu(x+\gamma)\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}-\beta+1$ και

$h(x)=\begin{cases} f(x),\ -1\le x\le 0 \\ g(x),\ 0<x\le\pi \end{cases}$ με $\alpha,\beta\in[0,+\infty)$ και $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

- Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[-1,0]$.
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

α) Να αποδείξετε ότι:
i) $\beta\ge 1$
ii) $\alpha=\gamma=0$ και $\beta=1$.

β) Να εξετάσετε αν η h είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(-1,0]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

δ) Αφού βρείτε στο διάστημα $[0,\pi]$ την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, η οποία την διαπερνά, στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}+2x=\pi+2$ στο διάστημα αυτό.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $h'(x_1)=0$.

στ) Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
ζ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της h και του άξονα x΄x.

Λύση

α) i) Για να ορίζεται η f πρέπει $\beta+x^3\ge 0\Leftrightarrow x^3\ge-\beta\overset{\beta\ge 0}{\Leftrightarrow} x\ge-\sqrt[3]{|-\beta|}\Leftrightarrow x\ge-\sqrt[3]{\beta}$ άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $\left[-\sqrt[3]{\beta},+\infty\right)$.

Από τον τύπο της h βλέπουμε ότι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f είναι το διάστημα $[-1,0]$ άρα πρέπει $-\sqrt[3]{\beta}\le-1\Leftrightarrow\sqrt[3]{\beta}\ge 1\Leftrightarrow\beta\ge 1$.

ii) Είναι $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)-\beta+1=1\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)=\beta\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\gamma=\beta\ \ (1)$

Το $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα $0\le\sigma\upsilon\nu\gamma\le 1\Leftrightarrow 0\le\beta\le 1$. Άρα $\beta=1\Leftrightarrow$ $\sigma\upsilon\nu\gamma=1\overset{\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow}\gamma=0$.

Αφού η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Rolle στο $[-1,0]$, τότε $f(-1)=f(0)\Leftrightarrow$

$(\alpha-1)^2\sqrt{1-1}=\alpha^2\sqrt{1}\Leftrightarrow\alpha^2=0\Leftrightarrow\alpha=0$

Άρα $f(x)=x^2\sqrt{1+x^3}$, $x\ge 1$, $g(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=\begin{cases} x^2\sqrt{1+x^3},\ -1\le x\le 0 \\ \eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x},\ 0<x\le\pi \end{cases}$

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ με παράγωγο:

$$h'(x)=2x\sqrt{1+x^3}+\frac{x^2\cdot 3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}=\frac{4x\left(1+x^3\right)+3x^4}{2\sqrt{1+x^3}}=\frac{7x^4+4x}{2\sqrt{1+x^3}}=\frac{x\left(7x^3+4\right)}{2\sqrt{1+x^3}}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{h(x)}{x+1}=+\infty$ γιατί

1ος τρόπος: Είναι $L=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{h(x)}{x+1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to -1^+}h'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x(7x^3+4)}{2\sqrt{1+x^3}}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[x(7x^3+4)\right]=3$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[2\sqrt{1+x^3}\right]=0$ και $2\sqrt{1+x^3}\geq 0$.

2ος τρόπος: Είναι $L=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{h(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2\sqrt{1+x^3}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2\cancel{\sqrt{1+x}}\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[x^2\sqrt{1-x+x^2}\right]=3$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{1+x}=0$ και $\sqrt{1+x}\geq 0$. Επίσης σπάσαμε την ρίζα γιατί για x κοντά -1 από μεγαλύτερες τιμές είναι $1+x>0$ και $1-x+x^2>0$.

Άρα η h δεν είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^{\cancel{2}}\sqrt{1+x^3}}{\cancel{x}}=0$ άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0]$.

γ) Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με παράγωγο:

$g'(x)=\text{συν}x\cdot e^{\text{συν}x}+\text{ημ}x\cdot e^{\text{συν}x}(-\text{ημ}x)=\text{συν}x\cdot e^{\text{συν}x}-\text{ημ}^2x\cdot e^{\text{συν}x}=e^{\text{συν}x}\left(\text{συν}x-\text{ημ}^2x\right)$

Έστω η συνάρτηση $k(x)=\text{συν}x-\text{ημ}^2x$, $x\in[0,\pi]$.

Η k είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $k'(x)=-\text{ημ}x-2\text{ημ}x\cdot\text{συν}x=-\text{ημ}x(1+2\text{συν}x)$ και ισχύει $g'(x)=e^{\text{συν}x}k(x)$ επομένως:

Η g' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με παράγωγο:

$g''(x)=-\text{ημ}x\cdot e^{\text{συν}x}\cdot k(x)+e^{\text{συν}x}\cdot k'(x)=-\text{ημ}x\cdot e^{\text{συν}x}\cdot k(x)-e^{\text{συν}x}\cdot\text{ημ}x(1+2\text{συν}x)=$

$=-\text{ημ}x\cdot e^{\text{συν}x}\left(k(x)+2\text{συν}x+1\right)=-\text{ημ}x\cdot e^{\text{συν}x}\left(\text{συν}x-\text{ημ}^2x+2\text{συν}x+1\right)=$

$=-\text{ημ}x\cdot e^{\text{συν}x}\left(\cancel{-1}+\text{συν}^2x+3\text{συν}x+\cancel{1}\right)=-\text{ημ}x\cdot\text{συν}x\cdot e^{\text{συν}x}(\text{συν}x+3)$

Είναι $-\text{ημ}x<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, $\text{συν}x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $\text{συν}x<0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $e^{\text{συν}x}>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και $-1\leq\text{συν}x\leq 1\Leftrightarrow 0<2\leq\text{συν}x+3\leq 4$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Άρα $-\text{ημ}x\cdot e^{\text{συν}x}(\text{συν}x+3)<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Επομένως $g''(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $g''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ άρα g' γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

δ) Αφού $g''(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $g''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ τότε η g είναι κοίλη στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$. Η g παρουσιάζει καμπή για $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Επομένως η εφαπτομένη στο $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ διαπερνά την γραφική παράσταση της h.

Η εφαπτομένη στο $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ έχει εξίσωση: $y-g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y-1=-x+\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow y=-x+\dfrac{\pi+2}{2}$

$2\text{ημ}x\cdot e^{\text{συν}x}+2x=\pi+2\Leftrightarrow\text{ημ}x\cdot e^{\text{συν}x}=-x+\dfrac{\pi+2}{2}\Leftrightarrow g(x)=-x+\dfrac{\pi+2}{2}\quad(1)$

Η g είναι κοίλη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα $g(x)\le -x+\frac{\pi+2}{2}$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=\frac{\pi}{2}$.

Η g είναι κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ άρα $g(x)\ge -x+\frac{\pi+2}{2}$ για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=\frac{\pi}{2}$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα στο $[0,\pi]$ την $x=\frac{\pi}{2}$.

ε) Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $h'(x)=g'(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}k(x)$.

Η k είναι συνεχής και $k(0)k\left(\frac{\pi}{2}\right)=1(-1)=-1<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $k(x_1)=0\Leftrightarrow e^{\sigma\upsilon\nu x_1}k(x_1)=0\Leftrightarrow g'(x_1)=0\Leftrightarrow h'(x_1)=0$.

Επειδή η h' γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ το x_1 είναι μοναδικό.

στ) Για $-1<x<0$ είναι $h'(x)=\dfrac{x(7x^3+4)}{2\sqrt{1+x^3}}$

Είναι $7x^3+4\ge 0\Leftrightarrow 7x^3\ge -4\Leftrightarrow x^3\ge -\frac{4}{7}\Leftrightarrow x\ge -\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ με $-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}>-1$ ($-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}>-1\Leftrightarrow \frac{4}{7}<1$ ισχύει)

Άρα $x(7x^3+4)>0$ για κάθε $x\in\left(-1,-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$ και $x(7x^3+4)<0$ για κάθε $x\in\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}},0\right)$ και $2\sqrt{1+x^3}>0$ για κάθε $x\in(-1,0)$.

Για $0<x<\pi$ είναι $h'(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}k(x)$ και από γ) ερώτημα έχουμε:

Για $0<x<x_1\overset{h'\searrow}{\Rightarrow}h'(x)>h'(x_1)=0$, $x_1<x<\frac{\pi}{2}\overset{h'\searrow}{\Rightarrow}h'(x)<h'(x_1)=0$ και $\frac{\pi}{2}<x<\pi\overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow}h'\left(\frac{\pi}{2}\right)<h'(x)<h'(\pi)\Leftrightarrow -1<h'(x)<-\frac{1}{e}$. Η h είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,\pi]$. Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$ και $h(0)=f(0)=0$ άρα η h είναι συνεχής στο μηδέν. Άρα η h είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$.

Επομένως $h'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-1,-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)\cup(0,x_1)$, $h'(x)<0$ για $x\in\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}},0\right)\cup\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

άρα $h\nearrow\left[-1,-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right]$, $h\searrow\left[-\sqrt[3]{\frac{4}{7}},0\right]$, $h\nearrow(0,x_1]$ και $h\searrow[x_1,\pi]$ ως συνεχής.

Η h παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ το $h\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$, για $x=x_1$ το $h(x_1)$ και τοπικό ελάχιστο για $x=-1$ το $h(-1)=0$, για $x=0$ το $h(0)=0$ και για $x=\pi$ το $h(\pi)=0$.

ζ) Έχουμε ολικό ελάχιστο $h(-1)=h(0)=h(\pi)=0$ άρα είναι $h(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[-1,0]$ με την ισότητα να ισχύει για $x=-1$ ή $x=0$ ή $x=\pi$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{\pi}|h(x)|dx=\int_{-1}^{\pi}h(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}g(x)dx=$$

$$=I_1+\int_0^{\pi}g(x)dx=I_1+\int_0^{\pi}\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}dx=I_1-\left[e^{\sigma\upsilon\nu x}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{4}-\frac{1}{e}+e=\frac{e-4+4e^2}{4e}$$ τ.μ. γιατί

$$I_1=\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$$

1ος τρόπος: Θέτουμε $1+x^3=u\geq 0$ για κάθε $x\in[-1,0]$ με $3x^2dx=du$. Για $x=-1$ είναι $u=0$ και για $x=0$ είναι $u=1$.

Άρα $I_1=\int_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{1+x^3}\,3x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt[3]{u}\,du=\frac{1}{3}\int_0^1 u^{\frac{1}{3}}du=\frac{1}{\cancel{3}}\left[\frac{\cancel{3}u^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$

2ος τρόπος: Θέτουμε $\sqrt[3]{1+x^3}=u\Leftrightarrow 1+x^3=u^3\Leftrightarrow x^3=u^3-1$ με $3x^2dx=3u^2du\Leftrightarrow x^2dx=u^2du$. Για $x=-1$ είναι $u=0$ και για $x=0$ είναι $u=1$.

Άρα $I_1=\int_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\int_0^1u\cdot u^2du=\int_0^1u^3\,du=\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$

8. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(1)=g(1)=e$ και $f\,'$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\leq\int_\alpha^\beta|f(x)|dx$ και στη συνέχεια $\int_0^2|f\,'(x)|dx\geq|f(0)-e|+|e-f(2)|$.

β) Έστω $\varphi(x)=f(x)+g(x),\quad x>0$ με $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\varphi(x+3h)-\varphi(x-2h)}{5h}+\frac{1}{x}=\varphi(x)+\ln x$, για κάθε x >0 να βρείτε τη συνάρτηση φ.

γ) Αν $d(x)$ είναι η απόσταση των σημείων $M(x,2e^x)$ και $N(x,\ln x)$, $x>0$τότε

i) Να δείξετε ότι $d(x)=\varphi(x)$.

ii) Αν $d(x)=2e^x-\ln x$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $d(x)$ έχει ελάχιστο για $x=x_0$ με $0<x_0<1$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\eta\mu(x-x_0)\cdot\ln(2-x)\cdot\ln(1+x_0-x)}{(d(x)-d(x_0))\cdot(x-x_0)^4}$.

ε) Υλικό σημείο κινείται κατά μήκος της καμπύλης της συνάρτησης $d(x)$. Αν τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του υλικού σημείου είναι 2cm/sec,να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι$4e^2-1$.

Λύση

α) Είναι$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$για κάθε $x\in R$, άρα$-\int_\alpha^\beta(|f(x)|)dx\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq\int_\alpha^\beta(|f(x)|)dx\Leftrightarrow$

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\leq\int_\alpha^\beta|f(x)|dx\ (1)$$

Ισχύει $\int_0^2|f\,'(x)|dx=\int_0^1|f\,'(x)|dx+\int_1^2|f\,'(x)|dx$. Από τη σχέση (1) έχουμε

$\int_0^1|f\,'(x)|dx\geq\left|\int_0^1f\,'(x)dx\right|=\left|[f(x)]_0^1\right|=|f(1)-f(0)|=|e-f(0)|=|f(0)-e|$ και

$$\int_1^2|f\,'(x)|dx\geq\left|\int_1^2f\,'(x)dx\right|=\left|[f(x)]_1^2\right|=|f(2)-f(1)|=|f(2)-e|=|e-f(2)|$$

Άρα $\int_0^2 |f\ '(x)|dx \ge |f(0)-e|+|e-f(2)|$

β) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(x+3h)-\varphi(x-2h)}{5h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(x+3h)-\varphi(x)+\varphi(x)-\varphi(x-2h)}{5h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\varphi(x+3h)-\varphi(x)}{5h}-\dfrac{\varphi(x-2h)-\varphi(x)}{5h}\right)(1)$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(x+3h)-\varphi(x)}{5h}\underset{\substack{h\to 0,\\ u\to 0}}{\overset{3h=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\varphi(x+u)-\varphi(x)}{5\frac{u}{3}}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\varphi(x+u)-\varphi(x)}{u}=\dfrac{3}{5}\varphi'(x)$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(x-2h)-\varphi(x)}{5h}\underset{\substack{h\to 0,\\ k\to 0}}{\overset{-2h=k}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\varphi(x+u)-\varphi(x)}{5\left(-\frac{u}{2}\right)}=-\dfrac{2}{5}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\varphi(x+u)-\varphi(x)}{u}=-\dfrac{2}{5}\varphi'(x)$

Από τη σχέση (1) προκύπτει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(x+3h)-\varphi(x-2h)}{5h}=\dfrac{3}{5}\varphi'(x)-\left(-\dfrac{2}{5}\right)\varphi'(x)=\varphi'(x)$

Άρα $\varphi'(x)+\dfrac{1}{x}=\varphi(x)+\ln x \Leftrightarrow \left(\varphi(x)+\ln x\right)'=\varphi(x)+\ln x \Leftrightarrow \varphi(x)+\ln x=ce^x \Leftrightarrow \varphi(x)=ce^x-\ln x$

Όμως $\varphi(1)=f(1)+g(1)=2e$, οπότε $\varphi(1)=ce-\ln 1 \Leftrightarrow 2e=ce \Leftrightarrow c=2$, άρα $\varphi(x)=2e^x-\ln x$.

γ) $d(x)=\sqrt{(x-x)^2+\left(2e^x-\ln x\right)^2}=|2e^x-\ln x|=2e^x-\ln x=\varphi(x)$ διότι $2e^x>e^x\ge x+1>x-1\ge \ln x$ για κάθε x >0.

$d'(x)=\left(2e^x-\ln x\right)'=2e^x-\dfrac{1}{x}$, $d''(x)=\left(2e^x-\dfrac{1}{x}\right)'=2e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$. Άρα η $d'\nearrow$ στο $(0,+\infty)$, οπότε

$d'\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}d'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}d'(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, διότι

$\lim\limits_{x\to 0^+}d'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2e^x-\dfrac{1}{x}\right)=2-\infty=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}d'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty-0=+\infty$.

Έτσι η εξίσωση $d'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα x_o>0 (το $0\in d'\left((0,+\infty)\right)$) η οποία είναι μοναδική ($d'\nearrow$ στο $(0,+\infty)$).

Είναι $d'(1)=2e-1>0$ και στο διάστημα $\Delta=(0,1)$ η d' έχει σύνολο τιμών το $d'(\Delta)=(-\infty,2e-1)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $d'(\Delta)$, η εξίσωση $d'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\Delta=(0,1)$.

Όμως η d' έχει μοναδική ρίζα το x_0, άρα $x_0\in(0,1)$.

x		0	x_0	1	$+\infty$
d'		-	0	+	+
d		↘		↗	↗

O.E
$d(x_o)$

δ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\eta\mu(x-x_0)\cdot\ln(2-x)\cdot\ln(1+x_0-x)}{\left(d(x)-d(x_0)\right)\cdot(x-x_0)^4}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{\eta\mu(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\dfrac{\ln(1+x_0-x)}{(x-x_0)^3}\cdot\dfrac{1}{\left(d(x)-d(x_0)\right)}\cdot\ln(2-x)\right)(1)$

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\eta\mu(x-x_0)}{x-x_0}\overset{x-x_0=u}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln\left(1+x_0-x\right)}{\left(x-x_0\right)^3}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\frac{-1}{1+x_0-x}}{3\left(x-x_0\right)^2}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{-1}{1+x_0-x}\cdot\dfrac{1}{3\left(x-x_0\right)^2}\right)=-1\cdot\left(+\infty\right)=-\infty$, διότι $3\left(x-x_0\right)^2>0$, κοντά στο x_0
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{d(x)-d(x_0)}=+\infty$, διότι $d(x)-d(x_0)>0$, κοντά στο x_0 , αφού $d(x_0)$ είναι ολικό ελάχιστο της $d(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\ln\left(2-x\right)=\ln\left(2-x_0\right)>0$, διότι $0<x_0<1\Leftrightarrow 0>-x_0>-1\Leftrightarrow 1<2-x_0<2\Leftrightarrow$ $\ln\left(2-x_0\right)>\ln 1=0$

  Άρα στη σχέση (1) $=1\cdot(-\infty)\cdot(+\infty)\cdot\ln\left(2-x_0\right)=-\infty$

ε) Είναι $d(x)=2e^x-\ln x$, άρα $d(t)=2e^{x(t)}-\ln x(t)$. Έχουμε $x(0)=1$ και $x'(t)=2\Leftrightarrow x(t)=2t+c$

Για t=0 , $x(0)=c\Leftrightarrow 1=c$, άρα $x(t)=2t+1$, οπότε $d(t)=2e^{2t+1}-\ln(2t+1)$

Θα βρούμε τη χρονική στιγμή όπου $d'\left(t\right)=4e^2-1$

Όμως $d'(t)=2e^{2t+1}\left(2t+1\right)'-\dfrac{2}{2t+1}=4e^{2t+1}-\dfrac{2}{2t+1}$, άρα $d'\left(t\right)=4e^2-1\Leftrightarrow$

$4e^{2t+1}-\dfrac{2}{2t+1}-4e^2+1=0$.(1)

Θέτω $K(t)=4e^{2t+1}-\dfrac{2}{2t+1}-4e^2+1$, $K\left(\dfrac{1}{2}\right)=4e^2-1-4e^2+1=0$

$K'(t)=\left(4e^{2t+1}-\dfrac{2}{2t+1}-4e^2+1\right)'=8e^{2t+1}+\dfrac{4}{\left(2t+1\right)^2}>0$,άρα $K\nearrow$ στο $\left(0,+\infty\right)$, οπότε είναι 1-1, επομένως η σχέση (1) $K(t)=K\left(\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

9. α) Αν για την συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g ισχύει g(x)>0 , για κάθε $x \in \mathbb{R}$,για την παραγωγίσιμη συνάρτηση φ ισχύει ότι $\varphi'(x) \neq 1$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $\int_{\varphi(x_0)}^{x_0} g(x)dx = 0$ να δειχθεί ότι η εξίσωση $\varphi(x) = x$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

β) Αν για την συνεχή στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x) \geq \frac{\eta\mu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x + \sigma\upsilon\nu^{\nu}x}$, $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x) - \frac{\eta\mu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x + \sigma\upsilon\nu^{\nu}x}\right)dx = 0, \nu \in \mathbb{N}^*$ τότε να δειχθεί ότι $f(x) = \frac{\eta\mu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x + \sigma\upsilon\nu^{\nu}x}$, $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], \nu \in \mathbb{N}^*$.

γ) Να δειχθεί ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{4}$.

δ) Να βρεθεί η συνεχή στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ συνάρτηση h για την οποία ισχύει $h^2(x) = f(x)$,όπου ν=2 και $h(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ε) Να βρεθεί η συνεχή στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ συνάρτηση σ για την οποία ισχύει

$$\sigma(x) = h(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sigma(t) - xt\sigma(t)\right)dt .$$

Λύση

α) Έχουμε $\int_{\varphi(x_0)}^{x_0} g(x)dx = 0$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$.Επειδή $g(x) > 0$,αν ήταν $\varphi(x_0) < x_0$ τότε $\int_{\varphi(x_0)}^{x_0} g(x)dx > 0$,άτοπο, αν ήταν $\varphi(x_0) > x_0$ τότε $\int_{x_0}^{\varphi(x_0)} g(x)dx > 0 \Leftrightarrow -\int_{\varphi(x_0)}^{x_0} g(x)dx > 0 \Leftrightarrow$ $\int_{\varphi(x_0)}^{x_0} g(x)dx < 0$, άτοπο, κατά συνέπεια $\varphi(x_0) = x_0$.Άρα η εξίσωση $\varphi(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον λύση το $x_0 \in \mathbb{R}$.

Αν η εξίσωση $\varphi(x) = x$ έχει και άλλη ρίζα $x_0' \neq x_0$,έστω $x_0' < x_0$ τότε για την συνάρτηση $k(x) = \varphi(x) - x$, $x \in [x_0', x_0]$ ισχύει ότι είναι συνεχής στο $[x_0', x_0]$ ως διαφορά συνεχών, παραγωγίσιμη στο (x_0', x_0) ως διαφορά παραγωγίσιμων με $k'(x) = \varphi'(x) - 1$ και $k(x_0) = k(x_0') = 0$,οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, x_0')$ τέτοιο ώστε $k'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \varphi'(\xi) - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi'(\xi) = 1$. Άτοπο γιατί $\varphi'(x) \neq 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.Άρα η εξίσωση $\varphi(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα το x_0.

β) Αν υπάρχει $x_1 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ώστε $f(x_1) > \frac{\eta\mu^{\nu}x_1}{\eta\mu^{\nu}x_1 + \sigma\upsilon\nu^{\nu}x_1} \Leftrightarrow f(x_1) - \frac{\eta\mu^{\nu}x_1}{\eta\mu^{\nu}x_1 + \sigma\upsilon\nu^{\nu}x_1} > 0$ τότε $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x) - \frac{\eta\mu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x + \sigma\upsilon\nu^{\nu}x}\right)dx > 0, \nu \in \mathbb{N}^*$,άτοπο κατά συνέπεια

$$f(x) - \frac{\eta\mu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x + \sigma\upsilon\nu^{\nu}x} = 0 , x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], \nu \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow f(x) = \frac{\eta\mu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x + \sigma\upsilon\nu^{\nu}x} ,\; x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], \nu \in \mathbb{N}^* .$$

γ) Έχουμε $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ ότι $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^\nu x}{\eta\mu^\nu x+\sigma\upsilon\nu^\nu x}dx$. Θέτουμε $u=\frac{\pi}{2}-x$ τότε $du=-dx$ και $x=\frac{\pi}{2}-u$. Για x=0 έχουμε $u=\frac{\pi}{2}$ και για $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε $u=0$,οπότε

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\eta\mu^\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\eta\mu^\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\sigma\upsilon\nu^\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^\nu u}{\sigma\upsilon\nu^\nu u+\eta\mu^\nu u}du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^\nu x}{\sigma\upsilon\nu^\nu x+\eta\mu^\nu x}dx=J \quad (1)$$

Αλλά I+J= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^\nu x}{\eta\mu^\nu x+\sigma\upsilon\nu^\nu x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^\nu x}{\sigma\upsilon\nu^\nu x+\eta\mu^\nu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^\nu x+\sigma\upsilon\nu^\nu x}{\sigma\upsilon\nu^\nu x+\eta\mu^\nu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2} \quad (2)$

$(2)\overset{(1)}{\Rightarrow} 2I=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{4}$.

δ) Για ν=2 έχουμε: $f(x)=\frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}=\eta\mu^2 x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Οπότε για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι

$$h^2(x)=f(x)\Leftrightarrow h^2(x)=\eta\mu^2 x\Leftrightarrow\sqrt{h^2(x)}=\sqrt{\eta\mu^2 x}\Leftrightarrow|h(x)|=|\eta\mu x| \underset{\eta\mu x\geq 0}{\overset{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow}} |h(x)|=\eta\mu x$$

Οπότε $h(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x=0 \overset{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} x=0$. Για $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ ισχύει $h(x)\neq 0$ και επειδή h συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,\frac{\pi}{2}]$.Αλλά $h(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow h(x)<0,\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ έχουμε

$h(x)=-\eta\mu x\ , x\in(0,\frac{\pi}{2}]$, οπότε $h(x)=\begin{cases}-\eta\mu x\ , x\in(0,\frac{\pi}{2}]\\ 0\ ,\ \ x=0\end{cases}\Rightarrow h(x)=-\eta\mu x\ , x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

ε) $\sigma(x)=h(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sigma(t)-xt\sigma(t)\right)dt\Leftrightarrow\sigma(x)=-\eta\mu x+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma(t)dt-\frac{2}{\pi}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sigma(t)dt$

Θέτουμε $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma(t)dt=c_1 , c_1\in\mathbb{R}$ (3) και $\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sigma(t)dt=c_2 , c_2\in\mathbb{R}$ (4) τότε έχουμε

$\sigma(x)=-\eta\mu x+\frac{2}{\pi}c_1-\frac{2}{\pi}xc_2 , x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ (5)

$(3)\overset{(5)}{\Leftrightarrow}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\eta\mu t+\frac{2}{\pi}c_1-\frac{2}{\pi}tc_2\right)dt=c_1\Leftrightarrow\left[\sigma\upsilon\nu t+\frac{2}{\pi}c_1 t-\frac{1}{\pi}c_2 t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=c_1\Leftrightarrow 1+c_1-\frac{1}{\pi}c_2\frac{\pi^2}{4}=c_1$

$\Leftrightarrow c_2=\frac{4}{\pi}\ (6)$

$(5)\overset{(6)}{\Leftrightarrow}\sigma(x)=-\eta\mu x+\frac{2}{\pi}c_1-\frac{8}{\pi^2}x , x\in[0,\frac{\pi}{2}]\ (7)$

$(4)\underset{(7)}{\overset{(6)}{\Leftrightarrow}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left(-\eta\mu t+\frac{2}{\pi}c_1-\frac{8}{\pi^2}t\right)dt=\frac{4}{\pi}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-t\eta\mu t+\frac{2}{\pi}c_1 t-\frac{8}{\pi^2}t^2\right)dt=\frac{4}{\pi}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}-1+c_1\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{4}{\pi}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\pi^2-12\pi+3\pi c_1-4\pi^2=48\Leftrightarrow c_1=\frac{48-2\pi^2+12\pi}{3\pi}\ (8)$ γιατί

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\eta\mu t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\sigma\upsilon\nu t)' dt = [t\sigma\upsilon\nu t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t)'\sigma\upsilon\nu t dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu t dt = \frac{\pi}{2} - [\eta\mu t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi}c_1 t - \frac{8}{\pi^2}t^2\right)dt = \left[\frac{1}{\pi}c_1 t^2 - \frac{8}{3\pi^2}t^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cancel{\pi}}c_1\frac{\pi^{\cancel{2}}}{4} - \frac{\cancel{8}}{3\cancel{\pi^2}}\frac{\pi^{\cancel{3}}}{\cancel{8}} = c_1\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$$

$$(7) \overset{(8)}{\Leftrightarrow} \sigma(x) = -\eta\mu x + \frac{96 - 4\pi^2 + 24\pi}{3\pi^2} - \frac{8}{\pi^2}x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$